REC'D NOV 21 1955

ARCHIV FÜR METEOROLOGIE, GEOPHYSIK UND BIOKLIMATOLOGIE

HERAUSGEGEBEN VON

DOZENT DR. W. MÖRIKOFER
PHYSIKALISCH-METEOROLOGISCHES OBSERVATORIUM
DAVOS

PROF. DR. F. STEINHAUSER
ZENTRALANSTALT FÜR METEOROLOGIE UND GEODYNAMIK
WIEN

SERIE A

METEOROLOGIE UND GEOPHYSIK

BAND 8, 4. (SCHLUSS-) HEFT
MIT 83 TEXTABBILDUNGEN
(ABGESCHLOSSEN AM 20. JUNI 1955)

UNITED STATES AIR FORCE
CAMBRIDGE RESEARCH CENTER
GEOPHYSICS
RESEARCH LIBRARY

WIEN
SPRINGER-VERLAG
1955

Arch. Met. Geoph. Biokl. A.

Serie A, Band 8 **Inhaltsverzeichnis** Heft 4

Seite

Reuter, H. Bodendruckänderung und Winddivergenz auf isobaren Flächen. (Mit 4 Textabbildungen) 321

Haurwitz, B. and F. Möller. The Semidiurnal Air-Temperature Variation and the Solar Air Tide. (With 1 Figure) 332

Neumann, J. Latitudinal Variation of Tropospheric Temperature Lapse Rate 351

Brocks, K. Wasserdampfschichtung über dem Meer und „Rauhigkeit" der Meeresoberfläche. (Mit 8 Textabbildungen) 354

Reiter, E. R. Der mitführende Einfluß einer Flußoberfläche auf die darüberliegenden Luftschichten. (Mit 8 Textabbildungen) 384

Gilbert, T. Das bewegliche Luftvolumen des Erdbodens. (Mit 5 Textabbildungen) 397

Ambach, W. Über den nächtlichen Wärmeumsatz der gefrorenen Gletscheroberfläche. (Mit 4 Textabbildungen) 411

Wagner, R. Zur Messung des luftelektrischen Potentialgefälles mittels Kollektoren. (Mit 18 Textabbildungen) 427

Westerhausen, H. Untersuchungen über die Bodenunruhe mit Perioden von 4 bis 8 Sekunden. (Mit 23 Textabbildungen) 465

Toperczer, M. Airy oder Pratt ? (Mit 1 Textabbildung) 490

Pühringer, A. Die magnetischen Elemente D, I, H und ihre Isoporen für das Feld einer homogenen magnetisierten Kugel. (Mit 11 Textabbildungen) 501

Buchbesprechungen 518

L'Institut Royal Météorologique de Belgique (W. Mörikofer). — Schneider-Carius, K., Wetterkunde — Wetterforschung (W. Mörikofer). — Wegener-Köppen, Else, Wladimir Köppen. Ein Gelehrtenleben für die Meteorologie (F. Steinhauser). — Raethjen, P., Dynamik der Zyklonen (F. Steinhauser). — Boyd, R. L. F. und M. J. Seaton, Rocket Exploration of the Upper Atmopshere (F. Steinhauser). — Final Report: Project Cirrus. Part I: Schaefer, V. J., Laboratory, Field, and Flight Experiments. Part. II: Langmuir, I., Analysis of the Effects of Periodic Seeding of the Atmosphere with Silver Iodide (F. H. Ludlam). — Sawada, R., The Atmospheric Lunar Tides (H. Reuter). — Beelitz, P., Radiosonden (F. Steinhauser). — Beelitz, P., Aerologisch-synoptische Kritik an den Radiosondenaufstiegen im Gebiete der Deutschen Demokratischen Republik (J. Lukesch). — Kotschin, N. J., I. A. Kibel und N. W. Rose, Theoretische Hydromechanik, Band I (F. Steinhauser). — Aspirations-Psychrometer-Tafeln, 3. Aufl. (W. Mörikofer). — Astronautica Acta, Vol. I, Fasc. 1 (F. Steinhauser). — Geophysik — Dokumentation (F. Steinhauser).

Das

„Archiv für Meteorologie, Geophysik und Bioklimatologie"

erscheint in zwangloser Folge in zwei parallelen Serien:

Serie A Meteorologie und Geophysik: Allgemeine, theoretische und synoptische Meteorologie, Geophysik der Atmosphäre, des Meeres und des festen Erdbodens.

Serie B Allgemeine und biologische Klimatologie: Allgemeine und medizinische Klimatologie, Agrar- und Mikroklimatologie, Meteorobiologie, Strahlungsforschung.

Die beiden Serien können unabhängig voneinander bezogen werden. Die Hefte werden einzeln berechnet und zu Bänden von 400 bis 500 Seiten vereinigt.

Das Archiv soll wissenschaftlich einwandfreie Arbeiten von allgemein fachlichem Interesse veröffentlichen. Es werden deshalb nur Originalarbeiten aufgenommen, die neue Erkenntnisse bringen, und zwar Aufsätze größeren Umfanges wie auch kleine Mitteilungen. Gelegentlich wird auch durch Sammelreferate über die neuesten Ergebnisse einzelner Spezialgebiete ein Überblick über den je-

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

551.509.317:551.543.5

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Bodendruckänderung und Winddivergenz auf isobaren Flächen.

Von

H. Reuter.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. In der synoptischen Praxis, insbesondere bei der Konstruktion von Vorhersagekarten, hat sich die Methode, Intensitätsänderungen des Bodendruckfeldes aus der geometrischen Konfiguration der Isopotentialen höher gelegener isobarer Flächen abzuschätzen, vornehmlich mittels der SCHERHAGschen Divergenztheorie, vielfach bewährt, wenngleich mitunter auch erhebliche Abweichungen vom SCHERHAGschen Konzept zu vermerken sind. Bei Annahme einer weitgehend stationären Höhenströmung folgt aus der Tendenzgleichung in Verbindung mit der Vorticitygleichung, daß ein Beitrag zur Bodendruckänderung nur dann von der betreffenden Schicht geliefert wird, wenn die (absolute) Vorticity ein entsprechendes Gefälle stromabwärts aufweist. Bei einem idealisierten Stromlinienverlauf im Bereich von Frontalzonen zeigt sich, daß die Vorticity im Zentralbereich hauptsächlich infolge Windscherung, im Delta und Einzugsgebiet dagegen vor allem durch das Verhältnis der Windgeschwindigkeit zum Krümmungsradius gegeben ist. Ohne daher auf die im allgemeinen zeitraubende Konstruktion der Linien gleicher absoluter Vorticity zurückgreifen zu müssen, läßt sich für die Praxis die Regel angeben, daß im Delta nur dann Druckfall zu erwarten ist, wenn das Verhältnis von Windgeschwindigkeit zum Krümmungsradius daselbst kleiner ist als die Windscherung im Zentralbereich. Es gibt daher auch einen Grenzfall für die Krümmung im Auffächerungsgebiet, bei dem keine Divergenz mehr auftritt. Dies dürfte im wesentlichen bei der als „Blocking Action" bekannten Aufspaltung einer zonalen Strömung in zwei nach Norden und Süden reichende Äste der Fall sein. Die hier abgeleitete Regel deckt sich *nicht* mit der SCHERHAGschen Auffassung, daß für die Größe des im Delta auftretenden Druckfalles die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate zwischen Zentrum und Delta maßgebend sei. Vor allem läßt sich bei dieser Anschauung niemals der eben erwähnte Grenzfall erkennen. Die theoretischen Betrachtungen werden an Hand einer Wetterlage überprüft und im wesentlichen als richtig befunden.

Summary. In synoptic procedures mainly as regards the construction of forcast maps the method frequently is used to estimate changes of surface pressure tendencies considering the shape of contours of upper constant pressure

surfaces according to SCHERHAG's well known "Divergence Theory", though some cases may show serious divergences with SCHERHAG's theory. Assuming a stationary upper flow the tendency equation combined with the vorticity equation shows that a contribution to surface pressure changes from the level under consideration can only be expected if the (absolute) vorticity decreases downstream. Considering the shape of streamlines (which practically coincide with the contours) in the vicinity of a frontal zone we may recognize that the vorticity in the "central zone" is mainly given by the wind shear, whereas in the "entrance" and "exit" area the quotient of wind velocity to radius of curvature prevails against the wind-shear. From this the conclusion is drawn that pressure fall in the "exit or delta" of a frontal zone can only be expected in practice if the quotient of wind velocity to radius of curvature in this area is less than the wind shear in the "center". Furthermore these considerations show that there exists a limit value for the radius of curvature in the "delta" where actually no divergence and therefore no contribution to pressure fall occurs. This case may be realized in the so called "Blocking action" where contours show a well marked split of an originally zonal current towards south and north and where usually no pressure fall below is observed. The here derived rule cannot be brought into accordance with SCHERHAG's idea that the magnitude of pressure fall in the "delta" of a frontal zone is given by the square of wind velocity in the "center" minus that in the "delta". Finally the theoretical considerations are checked in an actual weather situation and found to be useful for short range forecast procedures.

Résumé. Dans la pratique synoptique, en particulier par le dessin de cartes de prévision, la méthode consistant à estimer l'importance des variations de pression au sol à partir de la configuration géométrique des isopotentielles des surfaces isobares d'altitude, cela surtout au moyen de la théorie de la divergence de SCHERHAG, a été employée avec succès même s'il a fallu parfois s'écarter passablement du concept primitif de son auteur. En admettant un courant stationnaire d'altitude, l'équation de tendance combinée avec celle de vorticity montre qu'il y a effet de la couche considérée sur la variation de pression au sol seulement lorsque la vorticity (absolue) présente un gradient dirigé vers l'aval du vent. Au sein d'un système de lignes de courant idéalisées dans le domaine de zones frontales, on constate que la vorticity dans la partie centrale résulte essentiellement du cisaillement du vent, mais par contre du rapport du vent au rayon de courbure dans le delta et dans la région d'alimentation. Au lieu de recourir au tracé pénible des lignes d'égale vorticity absolue, on peut dans la pratique se fonder sur la règle qu'il n'y aura baisse de pression dans le delta que lorsque le rapport de la vitesse du vent au rayon de courbure y est plus petit que le cisaillement dans la zone centrale. Il y a donc aussi un cas limite pour la courbure des lignes de courant pour lequel il n'y a plus de divergence. Cela doit se produire lors du partage (blocking action) d'un courant zonal en deux branches dirigées vers le Nord et vers le Sud. La règle énoncée ici ne correspond pas à la conception de SCHERHAG selon laquelle la grandeur de la baisse de pression du delta dépend de la différence des carrés des vitesses au centre et au delta; selon ce point de vue, le cas limite mentionné n'apparaît pas. Ces considérations théoriques sont vérifiées par un exemple.

I. Einleitung.

In der synoptischen Praxis hat sich die Methode, Intensitätsänderungen des Bodendruckfeldes aus der geometrischen Konfiguration der Isopotentialen höher gelegener isobarer Flächen abzuschätzen, insbeson-

dere mittels der bekannten SCHERHAGschen Divergenztheorie, vielfach bewährt, wenngleich mitunter auch erhebliche Abweichungen vom SCHERHAGschen Konzept festzustellen sind. Für ein Versagen der Methode kommen vornehmlich zwei Ursachen in Frage: Erstens sind für Bodendruckänderungen die Vorgänge in der ganzen über dem betreffenden Ort befindlichen Luftsäule verantwortlich, so daß die einseitige Bevorzugung einer bestimmten Schicht ein unrichtiges Bild über den wahren Massenzufluß bzw. -abfluß hervorrufen kann. Zweitens ist es nicht immer möglich, aus der geometrischen Konfiguration der Isopotentialen einen eindeutigen Schluß auf *echte* Massendivergenzen bzw. -konvergenzen zu ziehen, worauf seit Aufstellung der Divergenztheorie von SCHERHAG des öfteren schon hingewiesen wurde (siehe z. B. F. BAUR und H. PHILIPPS [*1*]).

Die SCHERHAGsche Ansicht, daß in Gebieten mit betonter Auffächerung der Isopotentialen einer Höhendruckfläche (etwa der 500-mb-Topographie) im allgemeinen Bodendruckfall zu erwarten ist, hat sich vornehmlich im Delta von Frontalzonen bewährt. Dagegen sind gegenteilige Erfahrungen u. a. von FLOHN [*2*] gemacht worden, der am Westrand von Hochdruckgebieten trotz auffallender Richtungsdivergenz eine eindeutige Abschwächung von Fallgebieten beobachten konnte. Ähnliches gilt für die in der Literatur als „Blocking Action" bekannte Aufspaltung einer ursprünglich zonalen Strömung in zwei weit nach Norden und Süden reichende Äste, die trotz markanter Richtungsdivergenz keineswegs zu Bodendruckfall, sondern in den meisten Fällen zu einer sehr stationären Situation führt (siehe dazu H. REUTER [*3*]).

Es ist die Absicht der vorliegenden Untersuchung, einen Beitrag zur Klärung der Frage zu liefern, in welchem Maße es in der Praxis möglich ist, aus der geometrischen Konfiguration der Isopotentialen auf wirkliche Massendivergenzen bzw. -konvergenzen zu schließen und damit auf eventuelle Bodendruckänderungen, um auf diese Weise den Gültigkeitsbereich verschiedener, vor allem auf SCHERHAG zurückgehender Regeln abgrenzen zu können, zumal ihre Brauchbarkeit neuerdings wieder in Frage gestellt wurde (siehe R. C. BUNDGAARD [*4*]). SCHERHAG [*5*] selbst hat versucht, seine Regeln durch eine auf RYD zurückgehende Theorie über Abweichungen vom geostrophischen Wind bei stark wechselndem Druckgradienten stromabwärts zu stützen. Er kam dabei auch zu einer quantitativen Aussage über die Größe des in einem Auffächerungsbereich der Isopotentialen zu erwartenden Druckfalles. Seiner Auffassung nach muß für den *Betrag* des Druckfalles die Differenz der Quadrate der Windgeschwindigkeit stromabwärts maßgebend sein.

II. Theoretische Grundlagen.

Zur theoretischen Behandlung des vorliegenden Problems ist es notwendig, von der Tendenzgleichung auszugehen. Wird der Luftdruck als vertikale Koordinate verwendet, wie es in der synoptischen Praxis zur Darstellung der Strömungsverhältnisse in der freien Atmosphäre üblich

ist, so wird die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \tag{1}$$

geschrieben, wobei u und v die Geschwindigkeitskomponenten in der x- (Ost-) bezw. y- (Nord-) Richtung darstellen, die Differentiationen $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ bei konstant gehaltenem Druck durchzuführen sind und $\omega=dp/dt$ die sogenannte generalisierte Vertikalgeschwindigkeit bedeutet. Zur Ableitung von (1) siehe z. B. REUTER [3]. Aus (1) ergibt sich die Tendenzgleichung durch Integration sofort zu:

$$\omega_0 \equiv \frac{dp_0}{dt} = \int_{p_0}^{0} \mathrm{div}_2 \mathfrak{v}\, dp. \tag{2}$$

Die Gleichung (2) gilt ganz allgemein auch mit Einschluß von Reibungskräften. Beschränken wir uns jedoch auf reibungsfreie Bewegungen, so läßt sich die substantielle Druckänderung dp_0/dt hinreichend genau durch die lokale $\partial p_0/\partial t$ ersetzen, so daß wir (2) auch

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} \sim \int_{p_0}^{0} \mathrm{div}_2 \mathfrak{v}\, dp = -\int_{0}^{p_0} \mathrm{div}_2 \mathfrak{v}\, dp \tag{2a}$$

schreiben können. Dies besagt, daß für die Bodendruckänderungen die Winddivergenz auf den darüberliegenden isobaren Flächen maßgebend ist, worauf wohl erstmalig H. ERTEL [6] hingewiesen hat.

Die Bedeutung der höheren Schichten für das Zustandekommen von Bodendruckänderungen wird einem sofort bei dem Problem der Zyklogenese klar. In Bodennähe wird nämlich in diesem Falle infolge der dort vorhandenen Reibung bei zyklonaler Krümmung Konvergenz (negative Divergenz) auftreten. Die Bodenreibung wirkt daher als Druckausgleichsniveau ersten Ranges im Sinne von F. M. EXNER. Eine Vertiefung von zyklonalen Gebilden kann daher nur durch entsprechende (positive) Divergenz auf höheren isobaren Flächen hervorgerufen werden. Analoges gilt für antizyklonale Gebilde.

Zur Berechnung der Divergenz einer reibungsfreien Bewegung wird zweckmäßigerweise die Vorticity-Gleichung herangezogen, die sich in der Form

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\mathfrak{v}\cdot\nabla\eta=-\eta\,\mathrm{div}_2\mathfrak{v} \tag{3}$$

mit

$$\eta \equiv \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+2\,\Omega\sin\varphi,\quad \mathfrak{v}\equiv\mathfrak{v}(u,v,\omega), \tag{3a}$$

$\Omega \equiv$ Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, $\varphi \equiv$ geographische Breite, schreiben läßt (s. H. REUTER [3]).

Kommt der in der Praxis gehandhabten Methode, aus der *momentanen*

Konfiguration der Höhenisopotentialen auf Bodendruckänderungen zu schließen, reale Bedeutung zu, so ist dies nur so zu verstehen, daß für kürzere Zeiträume die Höhenströmung als stationär zu betrachten oder jedenfalls viel langsamer veränderlich ist als das Bodendruckfeld, wie es auch dem praktisch bewährten Steuerungsprinzip entspricht.

In einem solchen Falle wird die lokale Änderung der Vorticity η klein gegen die Vorticityadvektion zu setzen sein, also $\frac{\partial \eta}{\partial t} \ll \mathfrak{v} \cdot \nabla \eta$. Dann ergibt sich das Vorzeichen der Divergenz aus dem der Vorticityadvektion und wir können

$$\mathrm{div}_2 \mathfrak{v} \sim -\frac{1}{\eta} \mathfrak{v} \cdot \nabla \eta \tag{4}$$

schreiben. In der Praxis ist es unbequem, daß die Vorticityadvektion in (4) dreidimensional zu verstehen ist, nämlich

$$\mathfrak{v} \cdot \nabla \eta = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \eta}{\partial p}. \tag{5}$$

Man wird also gezwungen sein, die Betrachtungen auf solchen isobaren Flächen anzustellen, wo der schwer bestimmbare dritte Term auf der rechten Seite von (5) klein gegenüber der Summe der ersten zwei vorauszusetzen ist. Dies wird beispielsweise dort erfüllt sein, wo sehr große Horizontalgeschwindigkeiten auftreten, etwa im Bereich von Frontalzonen in entsprechender Höhe. Dann kann (4) auch

$$\mathrm{div}_2 \mathfrak{v} \sim -\frac{1}{\eta} c \frac{\partial \eta}{\partial s} \tag{6}$$

geschrieben werden. Hierbei ist unter c die Bahngeschwindigkeit und unter $\partial \eta / \partial s$ die Änderung der Größe η entlang der Stromlinien, die praktisch mit den Isopotentialen zusammenfallen, zu verstehen.

An Hand von (6) können wir nunmehr die Regeln der Scherhagschen Divergenztheorie diskutieren. Zunächst wollen wir einmal untersuchen, inwieweit eine Auffächerung der Isopotentialen (Stromlinien) zu einer Divergenz (Konvergenz) führen kann. Wie man aus (6) ersieht, hängt das Vorzeichen der Divergenz von dem Vorticitygefälle ab. Wird dieses Null, verschwindet auch die Divergenz. Wir wollen diesen Sonderfall näher betrachten. Wenn wir keine zu großräumigen Bewegungen voraussetzen, können wir von einer Variation der geographischen Breite, d. h. des Coriolisparameters, absehen. Dann erhalten wir anstelle von η nach (3a) die relative Vorticity

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{c}{R} + \frac{\partial c}{\partial n}. \tag{7}$$

Hierin ist c wieder die Bahngeschwindigkeit, R der Krümmungsradius der Stromlinie und n die Stromliniennormale. Bezüglich der Ableitung von (7) sei auf H. Reuter [3] verwiesen. Da nach (7) die Vorticity ζ von zwei Größen, nämlich der Windscherung und dem Verhältnis der Bahngeschwindigkeit zum Krümmungsradius, abhängt, kann ohne weiteres der Fall eintreten, daß das Vorticitygefälle Null wird. Nehmen wir den Fall einer Frontalzone mit ausgeprägtem Delta. Im Zentralbereich ist

die Strömung ziemlich geradlinig, die Vorticity kommt dort in erster Linie durch die Windscherung zustande. Im Delta, dem Auffächerungsgebiet, wird gerade umgekehrt die Scherung klein gegenüber dem Term c/R anzusehen sein. Nach (6) muß für eine positive Divergenz (Bodendruckfall) die Vorticity stromabwärts abnehmen. Dies ist im Delta einer Frontalzone nach unseren eben durchgeführten Überlegungen im wesentlichen nur möglich, wenn

$$\left(\frac{\partial c}{\partial n}\right)\text{Zentrum} > \left(\frac{c}{R}\right)\text{Delta} \tag{8}$$

wird. Sind die beiden Größen gleich, so tritt keine Divergenz auf, kehren sie ihr Vorzeichen um, so bedeutet dies Konvergenz.

Wir haben in der Einleitung erwähnt, daß SCHERHAG [5] ebenfalls erkannt hat, daß eine zu starke Auffächerung der Stromlinien im Delta keineswegs besondere Divergenz bedeuten muß. Doch deckt sich seine Erklärung, daß für das Ausmaß der Divergenz die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate Zentralbereich—Delta maßgebend ist, *nicht* mit der durch (8) festgelegten Bedingung. Andererseits ordnet sich in unsere Überlegungen ohne weiteres der ebenfalls in der Einleitung angeführte Fall der „Blocking Action" ein, der dann eintreten muß, wenn in (8) anstelle des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen zu setzen ist. In der Abb. 1 ist ein solcher Idealfall schematisch gezeichnet. Aus der synoptischen Erfahrung ist bekannt, daß ohne weiteres ähnliche Verhältnisse bezüglich Windscherung und Krümmung auftreten können, wie es der in der Abb. 1 wiedergegebene idealisierte Fall zeigt.

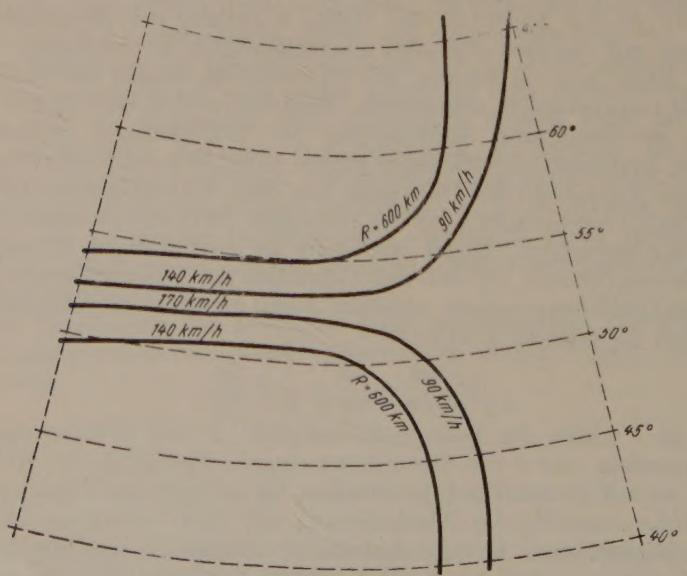


Abb. 1. Idealisierter Verlauf von Stromlinien bei einem praktisch verschwindenden Vorticitygefälle.

Natürlich haben wir bei den obigen Ableitungen gewisse vereinfachende Annahmen getroffen, deren Berechtigung im Einzelfall erst zu überprüfen wäre. Aber in der synoptischen Praxis müssen langwierige Methoden vermieden werden. Es erscheint daher angebracht, gerade für die Praxis das Ergebnis der bisherigen Überlegungen in der folgenden Regel zusammenzufassen:

Bei stationärer Höhenströmung kann eine Winddivergenz auf isobaren Flächen und damit ein Beitrag zur Bodendruckänderung nur dann erwartet werden, wenn ein Vorticitygefälle entlang der Stromlinien vorhanden ist. Im besonderen bedeutet eine Auffächerung der Isopotentialen (Stromlinien) im Delta einer Frontalzone nur dann echte Divergenz (Bodendruckfall), wenn das Verhältnis der dort vorhandenen Windgeschwindigkeit zum Krümmungsradius der Stromlinien kleiner ist als die Windscherung im Zentrum der Frontalzone.

III. Prüfung der theoretischen Überlegungen in einem konkreten Fall.

Wir wollen nunmehr die obigen rein theoretischen Betrachtungen durch eine Überprüfung ihrer Brauchbarkeit in einem konkreten Fall ergänzen. Dazu nehmen wir eine Wetterlage mit ausgeprägter Frontalzone und starker zyklonaler Entwicklung. Die Abb. 2 zeigt die Bodendruckverteilung vom 25. Februar 1954, 06 Uhr G.M.T. Das besondere Merkmal dieser Wetterlage ist ein im Raume Island liegendes Sturmtief, dessen Frontensysteme bereits auf die Britischen Inseln und das westliche Festland übergreifen. Dadurch wird der über Zentraleuropa noch vorhandene antizyklonale Einfluß zurückgedrängt. Der Schwerpunkt des hohen Druckes verlagert sich endgültig nach Mittelrußland. Das in Mitteleuropa herrschende winterliche Hochdruckwetter findet im weiteren Verlauf seinen Abschluß. Die typische Frontalzonenkonfiguration lassen die Isopotentialen der 500-mb-Topographie (ausgezogene Linien der Abb. 3) vom selben Tage 03 Uhr G.M.T. erkennen. Der Zentralbereich befindet sich über dem mittleren Nordatlantik westlich von Irland, das Delta über Frankreich und der Nordsee, während das Einzugsgebiet weit westlich in der Gegend zwischen Grönland und dem nordamerikanischen Festland zu suchen ist. Der Kern des Höhentiefs ist beinahe an derselben Stelle wie derjenige der Bodenzyklone zu finden. Südlich der Frontalzone liegt das warme Hoch im Bereich der Azoren. Die Isopotentialen zeigen im Delta eine markante Auffächerung. Über Mittel- und Osteuropa ist der Verlauf der Isopotentialen nicht ganz einheitlich, doch lassen dieselben *großräumig* eine Aufspaltung der im Bereich der eigentlichen Frontalzone mehr oder weniger zonalen Strömung nach Norden und Süden erkennen, die sich in das Schema des früher erwähnten „Blocking" Effektes einordnen ließe. Jedenfalls ist zwischen dem 10. und dem 30. östlichen Längengrad eine großräumige Auffächerung nach Norden bis ins Eismeer und nach Süden bis Nordafrika festzustellen. Eine Richtungsdivergenz ist sowohl im eigentlichen Delta der Frontalzone als auch in der eben erwähnten großräumigen Aufspaltung der Zonalströmung vor-

handen. Es bleibt jedoch die Frage offen, in welchem Ausmaß daraus auf wirkliche Massendivergenzen geschlossen werden darf. Gemäß unseren früheren theoretischen Betrachtungen ist dies in erster Linie aus einem in der Strömungsrichtung vorhandenem Gefälle der absoluten Vorticity zu erkennen. Nimmt die Vorticity stromabwärts zu, so ist nach (6) negative Divergenz (Konvergenz) des Windes auf der isobaren Fläche anzunehmen und diese Schicht liefert einen Beitrag für Bodendruckan-

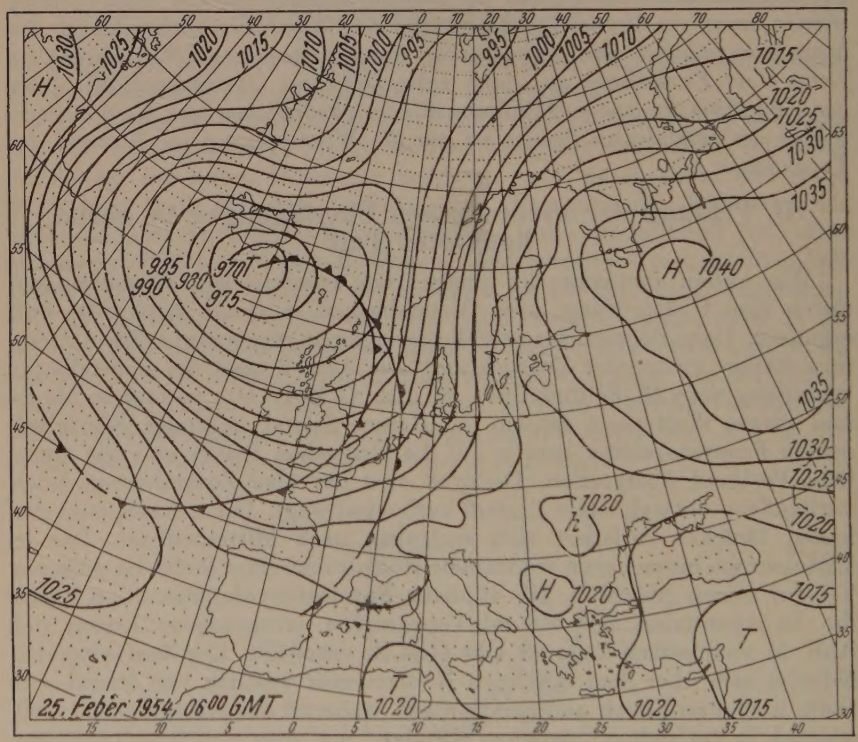


Abb. 2. Luftdruckverteilung am Boden vom 25. Februar 1954, 6 Uhr G.M.T.

stieg. Bei stromabwärts abnehmender Vorticity liegen umgekehrte Verhältnisse vor. In Abb. 3 sind strichliert die Linien gleicher absoluter Vorticity eingezeichnet[1]. Sofort erkennt man das starke Vorticitygefälle in Richtung der Isopotentialen (Stromlinien) im Bereich des Deltas über der Nordsee. Im südlichen Teil des Deltas über Frankreich ist dagegen kein besonderes Gefälle festzustellen. Dasselbe gilt für das großräumige Auffächerungsgebiet der Isopotentialen im östlichen Mitteleuropa. Die Verhältnisse im Einzugsgebiet der Frontalzone sind wegen der dort vorhandenen geringen Anzahl von Meßwerten über dem Ozean nicht mit

[1] Bezüglich der Methoden der Konstruktion solcher Vorticitywerte siehe REUTER [3].

derselben Genauigkeit darzustellen, doch fällt dort ebenfalls ein (positives) Vorticitygefälle stromabwärts auf. In Abb. 4 sind die zu der Bodenkarte (Abb. 2) gehörenden dreistündigen Drucktendenzen eingezeichnet. Ein Vergleich der Lage der isallobarischen Tiefs und Hochs mit den aus der Abb. 3 ersichtlichen Gebieten stärksten Vorticitygefälles zeigt eine weitgehende Übereinstimmung und damit eine Bestätigung der theoretischen Überlegungen gemäß der Formel (6) und (2a). Bemerkens-

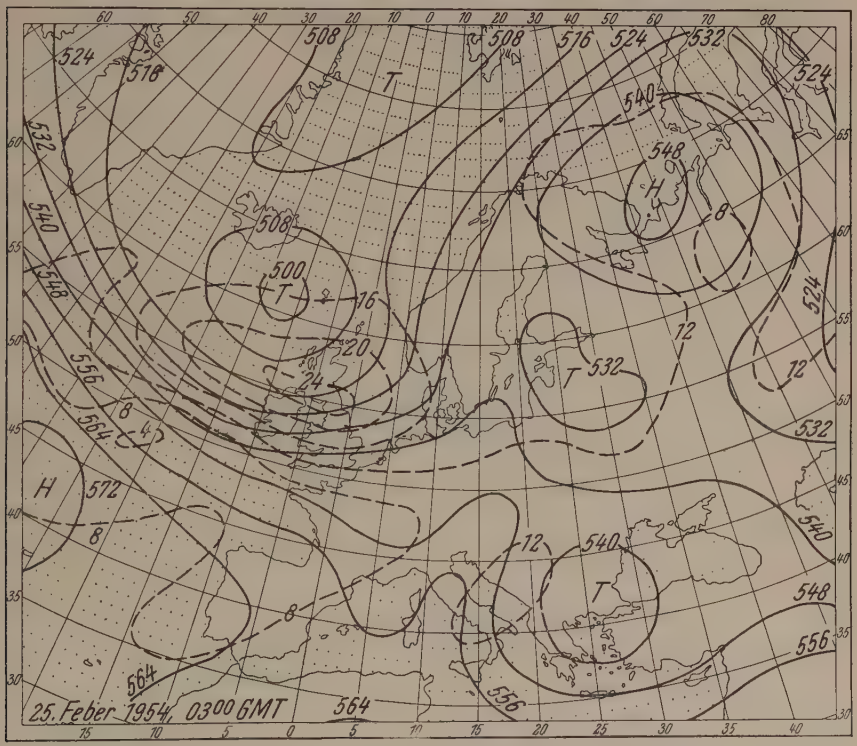


Abb. 3. Absolute Topographie der 500 mb-Fläche (ausgezogene Linien) und Linien gleicher absoluter Vorticity (strichlierte Linien) vom 25. Februar 1954, 3 Uhr G.M.T.

wert ist, daß auch hinter der Bodenkaltfront im Gebiet Schottland-Nordengland ein offenbar thermisch nicht erklärbarer Druckfall eintritt, der jedoch nach dem in der 500 mb-Topographie ersichtlichen Vorticitygefälle nicht verwundern darf. Andererseits ist in dem großen Auffächerungsgebiet zwischen dem 10. und dem 30. östlichen Längengrad tatsächlich kaum eine besondere Drucktendenz zu erkennen, wie es nach dem vorhandenen geringen Vorticitygefälle auch nicht zu erwarten wäre. Offenbar ist dort bereits die Krümmung der auf kurzer Strecke nach Norden bzw. Süden abbiegenden Isopotentialen (Stromlinien) zu groß, um noch eine merkliche Abnahme der Vorticity gegenüber dem mehr zonalen Bereich hervorzurufen. Ein Vergleich der Abb. 3 mit der

schematischen Darstellung der Abb. 1 zeigt, daß die Konfiguration der Stromlinien tatsächlich eine weitgehende Ähnlichkeit aufweist, also mithin dem Grenzfall derjenigen Richtungsdivergenz nahekommt, wo keine echte Divergenz mehr eintreten kann. Bei der Bestimmung der Linien gleicher absoluter Vorticity der Abb. 3 wurde von der vollständigen Formel (3a) Gebrauch gemacht und nicht etwa nur die Näherungsbeziehung (8) verwendet. In der Praxis wird dies jedoch meist zu zeit-

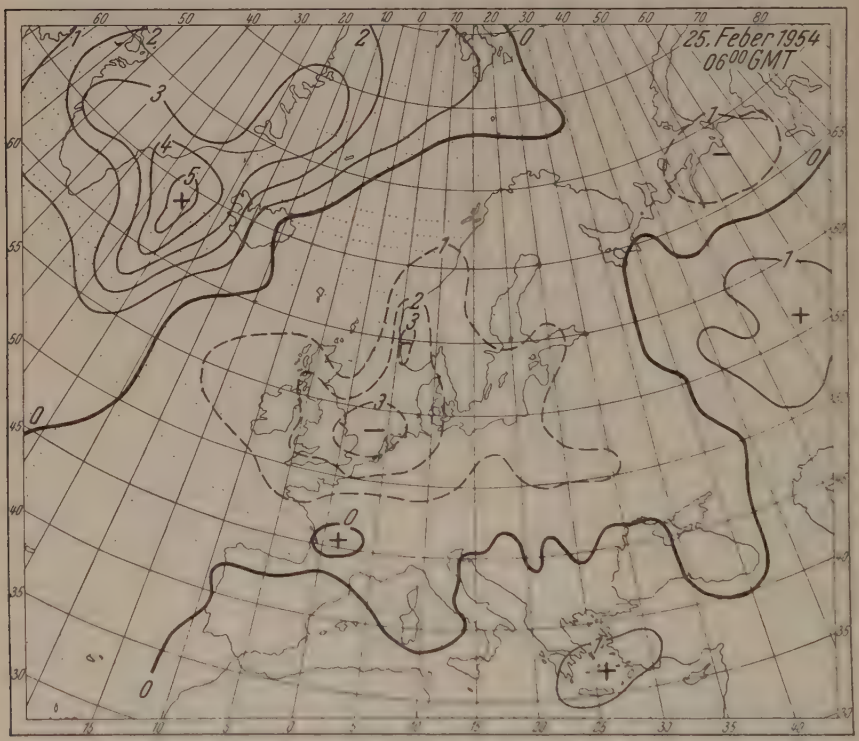


Abb. 4. Dreistündige Isallobaren für die Bodenkarte vom 25. Februar 1954, 6 Uhr G.M.T.

raubend sein. Man kann sich aber leicht überzeugen, daß mit Hilfe der Beziehung (8) im wesentlichen die gleichen Ergebnisse für die Auffächerungsbereiche sehr rasch abzuleiten sind, wobei entsprechende Nomogramme (siehe REUTER [3]) gute Dienste leisten können.

Wir wollen am Schluß nochmals betonen, daß eine wesentliche Voraussetzung für die hier beschriebene Methode der Erkennung von echten Divergenzen auf isobaren Flächen und damit entsprechenden Beiträgen zu Bodendruckänderungen die Annahme einer stationären Höhenströmung ist. Daß dies nicht immer erfüllt sein muß, liegt auf der Hand, zumal gerade infolge auftretender stärkerer Bodendruckänderungen auch die Höhenströmung modifiziert werden wird. Trotzdem ist zu erwarten,

daß die für die Konstruktion von Vorhersagekarten so wichtige Erfassung der Intensitätsänderungen passiv gesteuerter Druckänderungsgebiete in der hier geschilderten Weise in vielen Fällen möglich sein dürfte.

Literatur.

1. BAUR, F. und H. PHILIPPS: Die Bedeutung der Konvergenzen und Divergenzen des Geschwindigkeitsfeldes für Druckänderungen. Beitr. Phys. fr. Atm. **24**, 1 (1938).
2. FLOHN, H.: Über kalte metastabile Hochdruckgebiete. Meteorol. Rdsch. **2**, 67 (1949).
3. REUTER, H.: Methoden und Probleme der Wettervorhersage. Wien: Springer 1954.
4. BUNDGAARD, R. C.: A procedure of short-range weather forecasting. Comp. of Meterology, Am. Met. Soc., 775 (1951).
5. SCHERHAG, R.: Wetteranalyse und Wetterprognose. Berlin: Springer 1948.
6. ERTEL, H.: Winddivergenz auf isobaren Flächen und Luftdruckänderung. Meteorol. Z. **60**, 188 (1943).

551.524.31: 525.624

(Department of Meteorology and Oceanography, New York University, and Meteorologisch-Geophysikalisches Institut der Johannes-Gutenberg-Universität, Mainz.)

The Semidiurnal Air-Temperature Variation and the Solar Air Tide.

By

B. Haurwitz, New York, and **F. Möller**, Mainz.

With 1 Figure.

Abstract. The world wide distribution of the semidiurnal variation of the surface air temperature is analyzed, separately for the standing and the migrating temperature wave. The results of this analysis are applied to a discussion of the semidiurnal pressure wave. It is shown that the form of the observed standing semidiurnal pressure wave is such as would be expected on the basis of the resonance theory, including a term which is antisymmetrical to the equator because of the differences in land and water distribution in the northern and southern hemisphere. An other large antisymmetrical term in the migrating diurnal temperature wave does not appear in the semidiurnal migrating pressure wave because of unfavorable resonance conditions. These results may be considered as further evidence in favor of the resonance theory of the atmospheric tides.

Zusammenfassung. Die Verteilung der Halbtageswelle der Lufttemperatur über die ganze Erde wird getrennt für die stehende und die wandernde Temperaturwelle untersucht. Die Ergebnisse dieser Analyse werden auf eine Diskussion der halbtägigen Druckwelle angewendet. Es wird gezeigt, daß die Form der stehenden halbtägigen Druckwelle dieselbe ist, die man nach der Resonanztheorie erwarten kann, einschließlich eines Terms, der wegen der Unterschiede in der Land- und Wasserverteilung auf der Nord- und Südhalbkugel antisymmetrisch zum Äquator ist. Ein ähnlich großer antisymmetrischer Term in der wandernden täglichen Temperaturwelle erscheint wegen der ungünstigen Resonanzbedingungen nicht in der halbtägigen wandernden Druckwelle. Dieses Ergebnis kann als weiterer Beweis für die Resonanztheorie der atmosphärischen Gezeiten angesehen werden.

Résumé. Une analyse de la répartition de la variation semi-diurne de la température sur toute la terre est faite séparément pour les ondes de température fixe et migratoire. Le résultat de cette analyse est appliqué à une discussion de la variation semi-diurne de la pression atmosphérique. Il est démontré que la forme de l'onde de pression fixe est semblable à celle à laquelle il faut s'attendre d'après la théorie de résonance, y compris le terme qui est antisymétrique à l'équateur à la suite de la répartition inégale des continents et des océans sur les deux hémisphères. Un terme

asymétrique semblable dans l'onde de température migratoire ne paraît pas dans l'onde de pression migratoire à cause des conditions de résonnance défavorables. Ces résultats peuvent être considérés comme une nouvelle preuve en faveur de la théorie de résonnance des marées atmosphériques.

I. Introduction.

1. The solar semidiurnal pressure oscillation has, at low and middle latitudes, approximately the same phase angle everywhere when expressed in local time, while at high latitudes the phase angle is reasonably uniform when expressed in Greenwich time. This behavior of the semidiurnal oscillation can be well described by the superposition of two oscillations, one migrating with the sun from east to west, while the other is a standing oscillation whose maxima and minima occur at the same instant everywhere — to a good degree of approximation. For the sake of brevity we shall here adopt for these two components the following notation which has also been used by other writers. The *migrating oscillation* will be referred to as W_2 („wandernde Welle") the *standing oscillation*, because of its zonal symmetry, as Z_2. To indicate, where necessary, that we talk specifically of the oscillation of temperature, T, or pressure, p, we shall add the relevant symbol in parentheses after W_2 or Z_2.

W_2 can be attributed to the combination of two solar influences, namely, the gravitational tidal action and diurnal heating effects. As CHAPMAN (1924) and later WILKES (1951) have shown, the contribution of both factors must be of about equal magnitude. For Z_2 only the solar heating of the atmosphere can be responsible because there is no term in the solar tidal potential corresponding to such a standing oscillation.

The daily temperature wave must evidently migrate with the sun around the earth from east to west, and thus its maxima and minima must occur at about the same local time everywhere rather than at the same Greenwich time. This must be true not only for the diurnal component of the wave but also for its semidiurnal component which is important for the generation of the progressive pressure oscillation according to the resonance theory. Despite this migratory character of the daily temperature wave, it can be surmised that it must possess certain features which are simultaneous over the whole earth rather than regulated by local time. The amplitude of the daily temperature wave is very small over the oceans and much larger over land. Further, water and land are unevenly distributed over the earth, with the largest land masses concentrated in Eurasia. Therefore, at certain times during the Greenwich day, namely when the sun is shining on Eurasia, and to a smaller extent when it is shining on the Americas, the mean temperature of the whole atmosphere must be larger than at others. It appears likely, and it has been suggested by various authors that the standing pressure oscillation must be due to this unequal distribution of the diurnal temperature wave. (See, for instance, CHAPMAN, PRAMANIK and TOPPING, 1931.)

It is the aim of the present paper to study this surmise in some quantitative detail. While the solar gravitational tidal potential and its geographical distribution are well known, the same is not true for the semidiurnal temperature variation. Therefore, in part II, a survey is made of the geographical distribution of the semidiurnal temperature variation. It is found that both $W_2(T)$ and $Z_2(T)$ are represented by series in which the terms corresponding to those dominant in $W_2(p)$ and $Z_2(p)$ appear, but the dominant terms are different ones in the temperature and pressure series. In part III it is shown that the observed dominant terms in $W_2(p)$ and $Z_2(p)$ are magnified by resonance. For this demonstration the equations for the thermal tide are written in Section 5 in such a way that the formal analogy between these equations and those for the gravitational tides becomes apparent, with the heating function taking over the role of the gravitational tidal potential. Then a quantitative estimate of the resonance magnification can be obtained by making use of the analogy between the atmospheric tidal equations and those of an incompressible homogeneous ocean of the appropriate equivalent depth (Section 6). Z_2 is given particular attention. $Z_2(T)$ contains not only a term similar to $Z_2(p)$, but also a larger term antisymmetrical to the equator. However, this term is much less magnified by resonance than the symmetrical term. Nevertheless, observational evidence not only points to asymmetry in $Z_2(p)$, but indicates also that it has the right magnitude relative to the larger symmetrical part of $Z_2(p)$. Similarly $W_2(T)$ has a large term which is antisymmetrical to the equator. But the corresponding term in $W_2(p)$ is suppressed or greatly reduced because of its small resonance magnification (Section 7).

II. The Geographical Distribution of the Semidiurnal Temperature Variation.

2. The observational data. For a study of the temperature effects on the semidiurnal solar oscillation the diurnal temperature variation and its distribution over the globe have to be investigated. The treatment of the problem as given in this paper is to be regarded only as preliminary, without any pretense at great accuracy. An inspection of the annual means of the diurnal temperature variations at a number of stations showed that these diurnal variations are very similar to each other when reduced to uniform amplitude. Hence, it is possible to derive three normal types, for polar, temperate, and tropical latitudes, respectively. These daily variations, reduced to a mean range 1.00° C, are given in Table I as deviations from the daily mean. For the further work a compilation of the amplitudes of the diurnal temperature variation given by SHAW (1936) is used, but differing from SHAW the diurnal temperature amplitudes over the oceans are assumed to be negligibly small. The earth's surface has been divided into rectangles of 10° latitude and 20° longitude. For each rectangle the land coverage k in percent and the annual normal of the diurnal temperature amplitude A are determined, the

latter with the aid of SHAW's chart. If the numbers of Table I are multiplied by $k \cdot A$ the temperature deviation from the daily mean is found for every given time and rectangle. In this way ten maps of the temperature deviations from the local mean temperature for given Green-

Table I. *Mean diurnal temperature variation, reduced to amplitude* 1.00° *C.* (*Hours in Local Mean Time.*)

Hours / Latitude	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Polar 90°—70°	—.39	—.49	—.41	—.31	—.10	.26	.38	.51	.48	.29	.02	—.18
Temperate 70°—40°	—.30	—.38	—.44	—.38	—.12	.23	.47	.55	.43	.17	—.06	—.19
Tropical 40°—0°	—.28	—.35	—.41	—.46	—.20	.21	.46	.53	.47	.19	—.05	—.19

wich times have been prepared. These maps show $\tau\ (\varphi,\ \lambda,\ t)$, where $\tau = T - T_0$, the deviation from the local mean, for a given latitude φ, longitude λ, and Greenwich mean time t. These maps, which are not reproduced here, represent the basic material for the analysis of the field of the daily temperature oscillation.

3. The standing semidiurnal temperature wave, $Z_2\,(T)$. In order to find $Z_2\,(T)$ in our temperature data we have first to determine for the time of each of the ten maps referred to at the end of section 2 the latitudinal average of the temperature deviation, namely

$$\bar{\tau}\,(\varphi,t) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} \tau\,(\varphi,\lambda,t)\,d\lambda.$$

These values of $\bar{\tau}$ would vanish if the whole latitude circle were completely covered by land, $k = 1$ everywhere, and if A were independent of the locality, that is, of λ. In reality a standing diurnal temperature variation will exist mainly because of the unequal distribution of water and land, but also because of the varying physical properties of the land masses. For instance, at a given moment it may be local noon or afternoon at certain regions covered largely by land while the oceans are largely on the dark side of the globe. At such a time the mean temperature deviation of the latitude circle is positive. In a similar way negative temperature deviations occur at other times.

From this daily variation of the latitudinal mean temperature the following expression for $Z_2\,(T)$ as a series of *Legendre* polynomials is obtained:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}\,(\varphi,t) = {} & 0.024\sin(2t + 219^0) + 0.076\,P_1(\varphi)\sin(2t + 194^0) \\ & + 0.040\,P_2(\varphi)\sin(2t + 214^0) + 0.112\,P_3(\varphi)\sin(2t - 1^0) \\ & + 0.104\,P_4(\varphi)\sin(2t + 56^0). \qquad (3.1)\end{aligned}$$

The question may be raised whether the large coefficients of the terms other than P_2 in (3.1) may be due to our somewhat artificial assumption that no daily temperature variation exists over the oceans. In reality a slight daily temperature variation is also observed over the water. The Challenger expedition found over the Atlantic in 30° N latitude a daily range of 1.7°C with amplitudes of 0.9°C and 0.2°C, respectively, for the first and second harmonic. The observations of the Meteor expedition (KUHLBRODT, 1938), on the other hand, show a daily range of only 0.3°C with amplitudes of 0.13°C and 0.04° C for the first and second harmonic, respectively. During the Meteor voyage special care was taken to avoid errors in the air-temperature observations. Hence, it appears likely that the large Challenger values are incorrect, presumably because of radiation effects.

If the daily temperature variation over the oceans were taken into account the amplitudes in (3.1) would become smaller, for the following reasons. Each temperature deviation in the latitudinal mean arises because one temperature extreme is situated over land and well developed, while the opposite one is over the ocean so that it is zero by assumption, and therefore not compensating when the latitudinal mean is formed. If a small daily temperature variation over the ocean is taken into account the absolute values of the mean latitudinal deviations must become smaller. This remark applies to the first as well as to the second harmonic. In latitude belts completely covered by water no change occurs if the small daily temperature variation over the oceans is taken into account since the latitudinal mean over all longitudes vanishes, being equivalent to the mean over the whole day. For these reasons all coefficients of the above expression (3.1) would decrease at approximately the same rate, and the dominance of the term P_3 would be maintained.

4. The progressive semidiurnal temperature wave. The thermal part of the excitation of W_2 is generally attributed to that part of $W_2(T)$ which is independent of the geographic longitude. The form of this part of the temperature wave can readily be obtained from our material. It is necessary only to determine for each latitude zone the mean temperature amplitude in the case of a uniform land cover. To do so, one determines the mean value of $k \cdot A$ for the latitude. The reduced normal daily temperature variations given in Table I are multiplied with this mean value of kA. Thus one finds for each latitude zone a daily temperature variation which is the same at all longitudes if local time $t + \lambda$ is used. The distribution of this temperature variation over the globe is now analyzed similarly as in section 3. One obtains for the semidiurnal harmonic the following expression involving associated Legendre functions:

$$\tau(\varphi, t+\lambda) = 0.301\, P_2^2(\varphi) \sin[2(t+\lambda)+65°] + 0.368\, P_3^2(\varphi) \sin[2(t+\lambda)+65°] + 0.113\, P_4^2(\varphi) \sin[2(t+\lambda)+68°]. \quad (4.1)$$

The term with P_3^2 which changes sign across the equator is larger than the term P_2^2. The reason for the appearance of such a large term

with P_3^2 is obvious. Because of the small land area of the southern hemisphere the average diurnal temperature range is here small so that a large antisymmetrical term must appear in the harmonic series.

The question may be raised as in the preceding section to what extent the assumption of zero temperature amplitude over the oceans is affecting our results. The situation is now different from that of the standing wave. The mean values of the daily temperature variation become somewhat larger for all longitudes when the temperature variation over the oceans is also taken into account. Even in the zone from 40° to 70°S the daily temperature wave does not vanish completely. However, its value as found by the very careful observations of the Meteor expedition is so small that it can be neglected.

We abandon now the simplifying assumption just made, namely that $k \cdot A$ is independent of the longitude, and assume that the semidiurnal temperature amplitude varies also in this direction. Then the computations become somewhat more complicated. From the distribution of $\tau\ (\varphi, \lambda, t)$ one can find the representation as a series of spherical surface harmonics in λ and φ for various times t (Greenwich Mean Time). Furthermore, one can determine the mean position of the temperature wave relative to the pressure wave. The temperature wave which is influenced by the distribution of water and land shows an irregular motion. A detailed analysis of $W_2\,(p)$ shows also a somewhat irregular motion, but on the whole it moves uniformly from east to west. Only the regularly moving main term of $W_2\,(p)$ will be considered here. Then the irregular change of the relative positions of pressure and temperature wave with time is due to the temperature wave alone whose irregularities are larger.

The further analysis of the temperature was performed only for the P_2^2 wave. First the coefficients of the second term of a Fourier series for τ in its dependence on λ were computed for latitude zones of 10° width and for 10 equidistant times of the day (see HAURWITZ-MÖLLER, 1953). From these values the phase angle and amplitude of the P_2^2 wave have been derived. These quantities are shown in Table II, the phase angle α_T in column 2, the amplitude a_T in column 5. The dependence of τ on λ is assumed in the form sin 2 $(\lambda - \alpha_T)$; hence the sine wave has one of its zero values at the (easterly) longitude $\lambda = +\alpha_T$, and one of its maxima 45° of longitude farther to the east. Column 3 shows similarly the corresponding phase of the semidiurnal pressure wave which according to SIMPSON (1918) is 103°, in the present notation. The difference $\alpha_P - \alpha_T$ indicates how many degrees of longitude the semidiurnal temperature wave is ahead of or behind the pressure wave in a westward direction. To interpret correctly the position of the temperature wave relative to the pressure wave, these different angles have to be doubled since a complete semidiurnal wave comprises only 180° of longitude. The amplitudes a_T and phase angles 2 $(\alpha_P - \alpha_T)$ are represented in a harmonic dial (Figure 1). This figure shows the variations in the position of the temperature wave relative to the pressure wave.

From approximately 0300 GMT to 1100 the temperature wave is 0 to 3 hours or 0 to 45° longitude behind the pressure wave; from 1300 to 2200 GMT this lag increases to 5 to 7 hours or 75° to 105° longitude. From 1500 to 1800 and again at 2100 the phase difference is just 6 hours

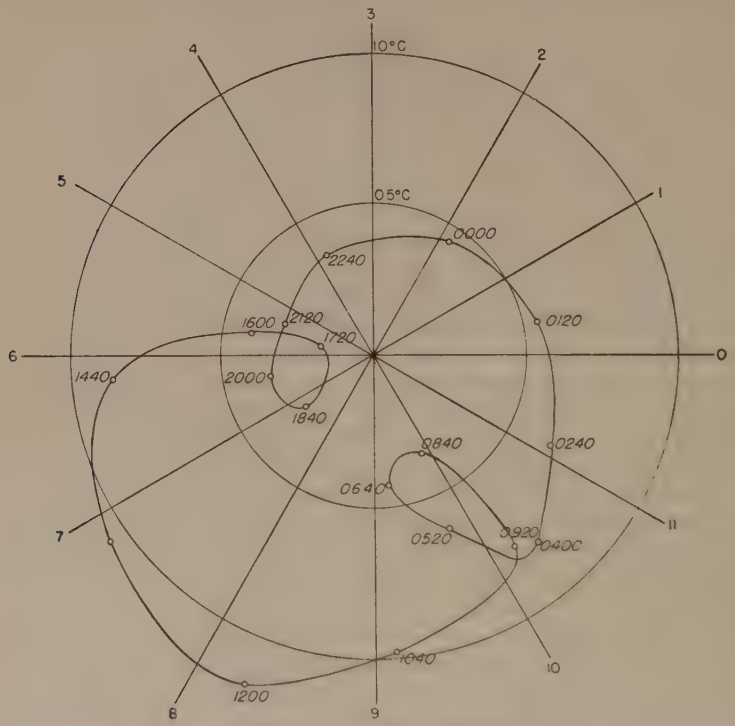


Fig. 1. The semidiurnal temperature wave relative to the pressure wave throughout the day. The distances from the origin represent temperature amplitudes, the hours at the outer circle give the time difference between the pressure and temperature maxima. The times next to each point of the irregular curve give the time of the day to which each value applies.

or 90° longitude so that temperature maxima coincide with pressure minima. From 2200 to 0200 the temperature wave is ahead of the pressure wave, but remains approximately stationary so that the pressure wave catches up with it. Hence the phases coincide around 0130.

The mean phase difference computed for the whole day is 260°. Hence the temperature wave lags 3 hours 20 min behind the pressure wave. Its mean amplitude is 0.27 $P_2^2(\varphi)$ in degrees C. The temperature minimum coincides nearly with the beginning of the pressure rise, the time of passage from negative to positive temperature deviations with the maximum pressure. However, if one were to consider positive temperature deviations as belonging to negative pressure deviations the pressure would follow the temperature with a phase difference of a quarter wave length.

This comparison between temperature and pressure wave takes into consideration only one part of the whole oscillation phenomenon. In the case of the pressure the progressive and the standing waves should be considered together. But also in the case of the temperature wave one

Table II. *Position of the semidiurnal temperature wave as function of the time of day (GMT)*

t	α_T	α_P	$2(\alpha_P - \alpha_T)$	a_T
0	75°E	103°E	56°	0.45
1h20m	77	83	12	0.55
2 40	77	63	332	0.65
4 00	67.5	43	311	0.82
5 20	56	23	294	0.62
6 40	44.5	3	277	0.43
8 00	14.5	163	297	0.36
9 20	170	143	306	0.78
10 40	166	123	274	0.98
12 00	159	103	248	1.16
13 20	155.5	83	215	1.06
14 40	150.5	63	185	0.86
16 00	137.5	43	171	0.40
17 20	117.5	23	171	0.17
18 40	74.5	3	217	0.28
20 00	67.5	163	191	0.35
21 20	62.5	143	161	0.31
22 40	66	123	114	0.36

should take into account, besides the P_2^2 term, the other terms of the progressive waves and allow for the effects of the standing temperature wave. Thus, the whole picture would become quite complicated.

The numerical values just obtained may be compared with the simplified computations which led to eq. (4. 1), in which the actual distribution of water and land was uniformly spread out over the whole latitude belt. The agreement between the two methods is quite remarkable. The temperature wave found in (4.1) has a phase retardation of 45° of longitude or 3 hours 0 minutes with respect to the pressure wave and a temperature amplitude of $0.30\ P_2^2(\varphi)$ ° C.

III. The Thermal Excitation of the Semidiurnal Pressure Oscillation.

5. The analogy between the equations for the gravitational and thermal tides. According to Simpson (1918) $Z_2(p)$ is well represented by the expression

$$0.117\ P_2(\varphi) \sin(2t + 105°) \text{ mbar}$$

where t is Greenwich mean time. On the other hand, in the expression (3.1) for $Z_2(T)$ the term P_2 has a rather small coefficient compared to the other terms. Hence, if $Z_2(p)$ is due to thermal excitation rather than unknown causes — the gravitational tidal potential contains no such

term — the effect of the term with P_2 in $Z_2(T)$ must be considerably more magnified by resonance than the other terms in (3.1). Similar considerations apply to W_2 as will be discussed more specifically in Section 8.

In order to show quantitatively that such selective resonance magnification occurs one could compute directly by means of the tidal equations the oscillations produced in the atmosphere by the various terms in (3.1) and (4.1). Instead of using this direct, but quite laborious approach we shall make use here of the analogies between tides in an incompressible and homogeneous ocean and the gravitational and thermal air tides.

The formal analogy between the two latter types of atmospheric oscillations has been studied by WILKES (1951). For our purposes a somewhat different approach is necessary: we shall show that a formal analogy exists between the systems of equations for the gravitational and thermal tides.

The following notations will be used:

$\vartheta,\ \lambda,\ z$	the colatitude, longitude, height
$u,\ v,\ w$	the corresponding velocity components
$\varrho_0,\ p_0$	the equilibrium density and pressure.

These are assumed as dependent on z only. A more elaborate theory should also take into account their latitudinal variations. But this refinement seems premature before the geographical distribution of $W_2(p)$ and $Z_2(p)$ is better known.

$\varrho,\ p$	the deviations of density and pressure from the equilibrium values.
Ω	the tidal potential
a	the earth's radius
g	the acceleration of gravity
$\gamma = c_p/c_v$	the ratio of the specific heats of air
R	the gas constant for air
ω	the angular velocity of the earth's rotation
Q	the heat added to the unit mass of air
$2\pi/\sigma$	the period of the oscillation, 12 hours in our case.

$$\chi \quad \frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(u\sin\vartheta) + \frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

the divergence of motion.

Then the equations for a purely gravitational air tide have the following form (see, for instance, WILKES, 1951):

$$i\sigma u - 2\omega v\cos\vartheta = -\frac{1}{a\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial\vartheta} - \frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}, \tag{5.1}$$

$$i\sigma v + 2\omega u\cos\vartheta = -\frac{1}{a\sin\vartheta\,\varrho_0}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{1}{a\sin\vartheta}\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}, \tag{5.2}$$

$$\varrho_0\frac{\partial\Omega}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\varrho = 0, \tag{5.3}$$

$$i\sigma\varrho + w\frac{d\varrho_0}{dz} + \varrho_0\chi = 0, \tag{5.4}$$

$$0 = i\sigma p + w\frac{dp_0}{dz} + \gamma p_0\chi. \tag{5.5}$$

The last equation states that the atmosphere undergoes adiabatic changes because of the tidal oscillations.

The equations for a purely thermal air tide differ from (5.1) to (5.5) as follows: In (5.1) — (5.3) Ω is zero; the equation of continuity (5.4) is the same; in equation (5.5) the left-hand side becomes $g\varrho_0 Q$ instead of zero (WILKES, 1951). These equations for the thermal tide will be denoted by (5.1a)—(5.5a) to distinguish them from the similar equations for the gravitational tide.

Equations (5.1a) — (5.4a) need not be written down here. The last equation, (5.5a), becomes

$$\frac{\varrho_0 R}{c_v} Q = i\sigma p + w\frac{dp_0}{dz} + \gamma p_0\chi. \tag{5.5a}$$

If we introduce here

$$P = p + \frac{i}{\sigma}\frac{R}{c_v}\varrho_0 Q, \tag{5.6}$$

(5.5a) becomes formally equal to (5.5) except that p is replaced by P. Similarly the right-hand side of (5.1a) becomes

$$-\frac{1}{a\varrho_0}\frac{\partial P}{\partial\vartheta} + \frac{1}{a}\frac{i}{\sigma}\frac{R}{c_v}\frac{\partial Q}{\partial\vartheta}.$$

Comparison of this expression with (5.1) suggests the introduction of the notation

$$U = -\frac{i}{\sigma}\frac{R}{c_v}Q \tag{5.7}$$

which makes equations (5.1a) and (5.2a) formally equal to (5.1) and (5.2).

The equation (5.3a) for the vertical direction in the case of the thermally excited oscillations may be written as follows:

$$\frac{\partial\varrho_0 U}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} + g\varrho = 0.$$

This equation differs from (5.3) for the gravitationally excited oscillations because ϱ_0 is under the differentiation sign. However, the additional term thus arising in the foregoing equation is small. This can be shown as follows. Since

$$\frac{\partial\varrho_0 U}{\partial z} = \varrho_0 U\left(\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial\varrho_0}{\partial z}\right),$$

it has to be shown that the first term in the parentheses is large compared to the second one. Now

$$\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial z}.$$

If it is assumed that

$$Q = Q_g e^{-\beta z/H}, \quad \text{then}$$

$$\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial z} = -\beta/H.$$

If it is further assumed that the heat added at 1000 m is one tenth of the surface value, a conservative estimate for the decrease of Q, it follows that

$$\beta/H = 2.3 \cdot 10^{-5}\ \text{cm}^{-1}.$$

On the other hand for an isothermal atmosphere, which represents a sufficiently good approximation for our estimate,

$$\frac{1}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho_0}{\partial z} = 1.25 \cdot 10^{-6}\ \text{cm}^{-1}$$

since H, the height of the homogeneous atmosphere, is about 8000 m. Consequently we may write as a sufficiently good approximation

$$\frac{\partial \varrho_0 U}{\partial z} = \varrho_0 \frac{\partial U}{\partial z}$$

If it were established that, in some upper layer in the atmosphere, absorption is taking place which might affect the thermally excited air tide appreciably, the foregoing point would, of course, need reconsideration. With the indicated approximation the equations for the thermally excited tide become equal to those of the gravitationally excited tide (5.1) — (5.5) provided that in the latter the tidal potential Ω is replaced by the heating function U, defined by (5.7), and if further p is replaced by P according to (5.6). With (5.7) we have

$$P = p - \varrho_0 U. \tag{5.8}$$

6. Resonance magnification of $Z_2(p)$. We shall now make use of this analogy between thermal and gravitational tide in order to estimate the magnification of the various terms in the series for $Z_2(T)$ and $W_2(T)$ as they appear in the semidiurnal pressure oscillation, with special emphasis on Z_2.

As explained before we shall not solve for this purpose the complete equations (5.1a)—(5.5a) for the thermal tides in a compressible fluid. Instead, we shall consider, for the sake of simplicity, the equations for an incompressible homogeneous ocean of an appropriate equivalent depth h. This simplification is justified since the resonance conditions for such an ocean are the same as for the actual atmosphere. It will be assumed that the equivalent depth $h = 7.9$ km (WILKES, 1949) because this value is indicated by the strong resonance of W_2 and by PEKERIS' (1937) work.

The tides of an ocean of the depth h are discussed by LAMB (1945). He introduces the quantity

$$\bar{\zeta} = -\Omega/g \tag{6.1}$$

where Ω is the gravitational tidal potential. According to the discussion of Section 5 we shall have to identify it with the heating function U, explained by (5.7), when we are discussing the thermal tides here. From the analogy between thermal and gravitational tides discussed in Section 5 it is clear that a periodicity in U will undergo the same resonance magnification as a periodicity of the same length in Ω.

Equation (5.8) shows further that there is a phase difference between

U and the added heat, Q. Another phase difference exists between this quantity and the temperature variation. Since we shall not discuss phase differences between pressure and temperature waves we need not consider these matters more closely. No such difficulty arises in the case of the relative magnitudes of amplitudes of the pressure oscillations caused by the various temperature oscillations with which we are concerned here.

Let further ζ be the surface displacement of the equivalent ocean and

$$u, v, \zeta, \bar{\zeta} \sim \exp [i (\sigma t + s \lambda)],$$

where the wave number s is either zero, for Z_2, or two for W_2. Finally, we use with LAMB the following abbreviations,

$$\zeta' = \zeta - \bar{\zeta}$$

$$\text{and } f = \sigma / 2 \omega$$

$$u = i \frac{g\sigma}{4 \omega^2 a} \frac{(\partial \zeta'/\partial \vartheta) + (s/f) \cot \vartheta \zeta'}{f^2 - \cos^2 \vartheta} \tag{6.2}$$

$$v = - \frac{g \sigma}{4 \omega^2 a} \frac{(\cos \vartheta / f) \partial \zeta'/\partial \vartheta + s \zeta'/\sin \vartheta}{f^2 - \cos^2 \vartheta} \tag{6.3}$$

If

$$x = \cos \vartheta$$

and

$$r^2 = \frac{4 \omega^2 a^2}{g h} \tag{6.4}$$

the equation of continuity may be written (LAMB, 1945)

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1 - x^2}{f^2 - x^2} \frac{d \zeta'}{d x} - \frac{s}{f} \frac{x}{f^2 - x^2} \zeta' \right] + \frac{s}{f} \frac{x}{f^2 - x^2} \frac{d \zeta'}{d x}$$

$$- \frac{s^2 \zeta'}{(1 - x^2)(f^2 - x^2)} + r^2 \zeta' = - r^2 \bar{\zeta} \tag{6.5}$$

which is the equation discussed by LAPLACE, HOUGH, and others.

First consider the case of axial symmetry when the motion is independent of λ, $s = 0$. Since we are furthermore interested in semidiurnal oscillation, $f = 1$*. This case applies to the standing semidiurnal oscillation, Z_2. Then

$$u = - i \frac{g}{2 \omega a} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{d \zeta'}{d x} \tag{6.2a}$$

$$v = \frac{g}{2 \omega a} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \frac{d \zeta'}{d x} \tag{6.3a}$$

$$d^2 \zeta' / d x^2 + r^2 \zeta' = - r^2 \bar{\zeta}. \tag{6.5a}$$

In the case of free oscillations, $\bar{\zeta} = 0$, and

$$\zeta' = A \cos rx + B \sin rx$$

as discussed by SOLBERG (1936). Since the velocity components must vanish at the poles, $x = \pm 1$, one finds

---

* Strictly speaking $f = 1 - \frac{1}{365}$ because of the difference between sidereal and solar day. But this difference may be neglected here.

$$r = \frac{n\pi}{2} = \frac{2\omega a}{\sqrt{g h_n}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.6}$$

where h_n is that height for which a free oscillation of the type n exists. The type n is given by

$$\zeta' = A \cos \frac{n\pi}{2} x, \text{ if } n \text{ is even}, \tag{6.7}$$

$$\zeta' = B \sin \frac{n\pi}{2} x, \text{ if } n \text{ is odd}. \tag{6.7a}$$

In the first case ζ' is symmetrical, in the second case antisymmetrical to the equator. The values of h_n belonging to different values of n are shown in Table III.

Table III. *Equivalent height for different types of zonal oscillations. Heights in km.*

Symmetrical.....	n	2	4	6	8	10
	h_n	8.92	2.23	0.99	0.56	0.36
Antisymmetrical...	n	1	3	5	7	9
	h_n	35.7	3.96	1.42	0.73	0.44

Consider now the inhomogeneous equation (6.5a). In this case the constant r depends only on the nature of the oscillating system, according to (6.4). Because of the form of the solutions of the homogeneous equation (6.5a) it is assumed that $\bar{\zeta}$ is of the form $\cos \frac{n\pi}{2} x$ or $\sin \frac{n\pi}{2} x$. Since this system of functions is orthogonal very general types of distributions of $\bar{\zeta}(\vartheta)$ can be represented by series of $\cos \frac{n\pi}{2} x$ and $\sin \frac{n\pi}{2} x$. Hence the assumption about the form of $\bar{\zeta}$ does not involve any loss of generality.

By standard methods it is found in the case when

$$\bar{\zeta} = K \cos \frac{n\pi}{2} x \qquad n = \text{even integer}$$

that

$$\zeta' = \frac{K}{\frac{n^2\pi^2}{4r^2} - 1} \cos \frac{n\pi}{2} x \tag{6.8}$$

and when

$$\bar{\zeta} = K \sin \frac{n\pi}{2} x \qquad n = \text{odd integer}$$

that

$$\zeta' = \frac{K}{\frac{n^2\pi^2}{4r^2} - 1} \sin \frac{n\pi}{2} x. \tag{6.9}$$

In (6.8) and (6.9) two arbitrary constants which arise in the solution of (6.5a) are equal to zero because of the condition that the horizontal velocities vanish at the poles. From (6.4) and (6.6) it is seen that the constant factor of K in (6.8) and (6.9) may be written in the form

$$[(h/h_n) - 1]^{-1}.$$

Since $\zeta' = \zeta - \bar{\zeta}$ it follows that the resonance magnification

$$\zeta/\bar{\zeta} = (\zeta'/\bar{\zeta}) + 1 = [1 - (h_n/h)]^{-1}. \tag{6.10}$$

For this computation the forcing term must be transformed into a series of functions $\sin n\pi\,(x/2)$ and $\cos n\pi\,(x/2)$. In the case of the standing semidiurnal pressure oscillation the magnitude of the forcing term is given by (3.1), the expression for the standing semidiurnal temperature oscillation, except for a constant factor as discussed at the beginning of this section. The expression (3.1) is a series of LEGENDRE polynomials which has to be transformed for our purposes by means of the following relations:

$$P_1(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right)$$

$$P_2(x) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\pi x}{k^2}$$

$$P_3(x) = \frac{48}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{10}{(2k-1)^2\pi^2}\right] (-1)^{k-1} \frac{\sin \frac{2k-1}{2}\pi x}{(2k-1)^2}$$

$$P_4(x) = \frac{20}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{10.5}{k^2\pi^2}\right) \frac{\cos k\pi x}{k^2}.$$

These relations are obtained by standard methods. With their aid the expression for the standing semidiurnal temperature wave may be written in the following form:

$$\bar{\tau}(\varphi, t) = 0.024 \sin(2t + 219^\circ)$$

$$+ \sum_{1,3,\ldots}^{9} K_n \sin\frac{n\pi}{2} x \sin(2t + \alpha_n) + \sum_{2,4,\ldots}^{10} K_n \cos\frac{n\pi}{2} x \sin(2t + \alpha_n) \qquad (6.11)$$

The values of K_n and α_n are shown in columns 3 and 4 of Table IV. The units of K_n are degrees Centigrade.

The factor (6.10) for the resonance magnification depends on h_n, the height given in Table III at which free oscillations of the type n exist, and on h, the equivalent height of the actual atmosphere. The latter is assumed equal to 7.9 km according to the calculations of PEKERIS (1937) and WILKES (1949). The resonance magnification factor (6.10), or rather its absolute value is given in column 5 of Table IV for the various components of Z_2. Only the absolute value is needed since we are not concerned with the phase angles of Z_2. The greatest magnification, almost eight times, occurs for the term of the form $\cos \pi x$ because h_n for this term is closest to the equivalent height, 7.9 km.

The simple theoretical computations made in this section cannot give the actual, but only relative values for the pressure amplitudes. But the product $K|1 - (h_n/h)|^{-1}$ given in the last column of Table IV shows that the term with $\cos \pi x$ will be predominant in the pressure oscillation. The series for $P_k(x)$ above show that $\cos \pi x$ resembles P_2, which appears in SIMPSON's (1918) empirical expression for $Z_2(p)$ given at the beginning

Table IV. *Resonance magnification of the standing semidiurnal temperature wave.*

n	Function	K_n	α_n	$\lvert 1-h_n/h\rvert^{-1}$	$K_n \lvert 1-h_n/h\rvert^{-1}$
1	$\sin \frac{\pi}{2} x$	0.068	190°	0.28	0.019
3	$\sin \frac{3\pi}{2} x$	0.047	177°	2.01	0.095
5	$\sin \frac{5\pi}{2} x$	0.018	357°	1.22	0.023
7	$\sin \frac{7\pi}{2} x$	0.010	177°	1.10	0.011
9	$\sin \frac{9\pi}{2} x$	0.006	357°	1.06	0.006
2	$\cos \pi x$	0.038	59°	7.76	0.293
4	$\cos 2\pi x$	0.033	55°	1.39	0.045
6	$\cos 3\pi x$	0.018	235°	1.14	0.021
8	$\cos 4\pi x$	0.011	55°	1.08	0.012
10	$\cos 5\pi x$	0.007	239°	1.05	0.007

of Section 5. Moreover, SIMPSON's data for the empirical distribution of the amplitude of $Z_2(p)$ could be represented about as well by the expression

$$-0.093 \cos \pi x \ mbar$$

as by SIMPSON's formula. The predominance of this term in the pressure oscillation despite its smallness in the temperature oscillation is thus completely accounted for by resonance magnification, as Table IV shows.

Table IV would lead one to expect that an additional term, of the form $\sin \frac{3\pi}{2} x$, might be present in $Z_2(p)$. The effect of this term would be to introduce an antisymmetry between the northern and southern hemisphere. A not yet completed study of the geographical distribution of the semidiurnal pressure oscillation based on more material than was available to SIMPSON indicates that such an antisymmetry actually exists. On the basis of the results so far obtained it appears that the amplitude of $Z_2(p)$ is about 0.085 *mb.* at 65° N and only 0.052 at around 65° S. These values would lead to the following expression for the latitude dependence of the amplitude (in *mb*)

$$-0.072 \cos \pi x - 0.018 \sin \frac{3\pi}{2} x.$$

The ratio of the two numerical factors in this expression is 4.0, in fair agreement with the value 3.1 which one would expect from Table IV. A more complete discussion has to be postponed until the analysis of the geographical distribution of S_2 is completed.

The simple theory developed here does not permit a direct estimate of the actual size of $Z_2(p)$. But such an estimate may be made by means of formulae given by WILKES (1951). In this paper WILKES shows that

the pressure oscillation at the ground produced by a temperature oscillation with the surface amplitude K_o is very closely equal to a pressure oscillation produced by a gravitational potential $\tilde{\omega}_o$ provided that

$$\tilde{\omega}_o = \frac{R K_o}{\beta}$$

(*eq.* 40 of WILKES) where $R = 2.87 \cdot 10^6$ cgs. the gas constant for air, and where β gives the rate of the decrease of the temperature amplitude with elevation,

$$K = K_o \exp\left(-\beta \frac{Z}{H}\right),$$

where $H \sim 8$ km, the height of the homogeneous atmosphere. The amplitude of the surface pressure oscillation

$$\pi_o = |\lambda| \varrho \tilde{\omega}_o$$

where in our case $|\lambda| = 7.76$, the magnification factor of the term with $\cos \pi x$, according to Table IV. With $\varrho = 1.3 \cdot 10^{-3}$ g/cm^3 for the air density and $\pi_o = 0.072$ *mb* according to p. 346, it follows that $\tilde{\omega}_o = 6.33 \cdot 10^3$ cgs. Further, since for $\cos \pi x$ $K_o = 0.038°$, according to Table IV, $\beta = 17.2$. This value of β would indicate that the amplitude of the standing semidiurnal temperature oscillation is reduced to one tenth of its surface value at 1070 m elevation. Such a rate of decrease with elevation does not appear unreasonable. Hence, it would seem that the observed temperature variation gives the correct order of magnitude for the amplitude of Z_2 (p).

WILKES (1951, eq. 47) has also shown that approximately

$$|\beta| = H (\varrho \sigma \gamma / A)^{1/2}$$

if the temperature wave of the period $2\pi/\sigma$ is propagated upward by turbulent mixing with an Austausch coefficient A. The value of β found here would require that $A = 580$ cgs, a value which is larger than those generally assumed for eddy conductivity. However, the semidiurnal temperature wave aloft is doubtless in part due to direct radiational influences, at least at levels more than a few hundred meters above the ground, so that no serious difficulty arises.

7. Resonance magnification of W_2 (p). This wave is the most pronounced of the atmospheric tidal oscillations. It is caused in part by the solar tidal potential, partly by W_2 (T). Its large magnitude is explained by the fact that the atmosphere has a free period whose length is very close to 12 hours, as shown by PEKERIS (1937) and others. According to SIMPSON the distribution of its amplitude as a function of the latitude φ can be expressed by

$$1.25 \text{ mb } \cos^3 \varphi.$$

On the other hand, the relevant term in the solar tidal potential has the form P_2^2 (φ), and a similar term appears in the series for W_2 (T), (4.1). On theoretical grounds one would expect for such an oscillation a series of the form

$$P_2^2 (\varphi) - 0.087 P_4^2 (\varphi) + \ldots .$$

at least as long as meridional variations of the temperature are neglected.

SIMPSON's empirical expression looks quite different from that predicted by the theory. However, SIMPSON's data can be represented equally well by

$$1.32 \text{ mb } [P_2^2(\varphi) - 0.164\, P_4^2(\varphi)]$$

which, in view of the still existing uncertainty of the empirical data, seems to indicate a reasonably satisfactory agreement between theory and observations.

In the series (4.1) for $W_2(T)$, the term with $P_3^2(\varphi)$ has a larger coefficient than $P_2^2(\varphi)$. That the corresponding term in the migrating pressure oscillation does not appear is due to the absence of resonance.

In order to show this we have computed for various equivalent heights h the periods of free oscillations whose latitudinal distribution has the (approximate) form $P_3^2(\varphi)$. The results are shown in Table V. The second line of this table gives the periods D_1 of the oscillations migrating with the sun, to the west, which concern us here. The third line gives the periods D_2 of the eastward moving oscillation which one also obtains as a result of these calculations. It will be seen that for the earth's atmosphere with the equivalent height of 7.9 km the relevant free period is 9.4 hours.

Table V. *Free oscillations of the form* $P_3^2(\varphi)$.

h	8.3	7.9	7	6	5	3.7 km
D_1	9.23	9.40	9.84	10.33	11.0	12.0 hrs
D_2	10.96	10.82	11.4	12.05	12.9	—

Now the resonance magnification experienced by a simple harmonic oscillator with the free period D_o subject to a force with the period D is proportional to $(D^2/D_o^2 - 1)^{-1}$. Hence with $D_o = 9.4$ hrs, $D = 12$ hrs the resonance magnification factor of the temperature term with P_3^2 would be proportional to 1.6. On the other hand, if the free period of the atmosphere for the oscillation of the form P_2^2 is 12.1 hours, a reasonable value, the magnification factor would be proportional to 61. Thus the term containing P_2^2 would be about 38 times more magnified by resonance than the term with P_3^2. It is therefore not surprising that the latter is not found in the empirical distribution of the semidiurnal pressure oscillation.

The temperature term with P_4^2 which appears in (4.1) would be even less magnified because the free period of an atmosphere with the equivalent height of 7.9 km would be about 9 hours for this oscillation.

IV. Conclusion.

The foregoing discussion has shown how the semidiurnal temperature oscillation can account for the observed geographical distribution of the semidiurnal pressure oscillation. The magnification of some terms and the suppression, or near suppression, of others is to be attributed to the fact the atmosphere has an equivalent height of 7.9 km because of its

vertical thermal structure. Since this value of the equivalent height is the one required by the resonance theory of W_2 our results may be regarded as a further support of this theory.

One of the most frequent objections raised against this theory is the apparent improbability that the earth's atmosphere should accidentally have a free period in the close vicinity of 12 hours to satisfy the requirement of very accurate tuning to the twelve hourly solar tidal and thermal periods. It must be admitted that such a coincidence between free and forced period appears to be improbable and may be a rare occurrence among planetary atmospheres. Nevertheless, as more and more facts are found which point to the resonance theory it is necessary to emphasize that the accurate tuning required while admittedly improbable is nevertheless entirely possible and will have to be accepted as a fact in the absence of other rational explanations of the atmospheric tidal oscillations.

Moreover, the objection to the resonance theory based on the apparently accidental coincidence between free and forced period has been considerably weakened, if not entirely removed, by a recent paper of HOLMBERG (1952) where it is shown that this coincidence may in reality be due to the past history of the earth's rotation. KELVIN (1882) had originally pointed out that a couple accelerating the earth's rotation must exist because of the sun's unequal attraction on the tidal protuberances of the atmosphere since the maxima of $W_2(p)$ occur about two hours before solar transit. HOLMBERG shows that this accelerating couple may be large enough to balance the retarding effect of the tidal friction in the ocean. Presumably the earth's rotation was originally considerably faster than now and was slowed down by oceanic tidal friction to its present rate. As long as the earth's rotation was faster than now resonance in the atmosphere did not occur. In the first place the period of the tide generating forces was shorter than now. Secondly, the free period of the atmosphere which also depends on the earth's velocity of rotation was longer than now at least if the vertical structure of the atmosphere was similar to what it is at present. As the length of the day increased toward its present value the difference between free and forced period became smaller, and an air tide developed whose amplitude increased with the continuing reduction of the earth's rotation until it became large enough to prevent a further decrease of the earth's rotation.

This hypothesis, as HOLMBERG points out, is tentative, and many of the quantitative estimates on which it is based are correct merely as far as the order of magnitude is concerned. But it provides a plausible mechanism for the explanation of the tuning postulated by the resonance theory and makes this tuning appear as a necessary consequence of the planetary history of the earth rather than as a fortuitous accident. HOLMBERGS hypothesis combined with the observational evidence on atmospheric tides and with our knowledge of the stratification of the atmosphere make it highly probable that the resonance theory provides the correct explanation of the atmospheric tides.

References.

CHAPMAN, S., 1924: The semidiurnal oscillation of the atmosphere. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., **50**, 156—193.

CHAPMAN, S., S. K. PRAMANIK and J. TOPPING, 1931: The world wide oscillations of the atmosphere. Gerl. Beitr. Geophys., **33**, 246—260.

HAURWITZ, B. and F. MÖLLER, 1953: On the thermal excitation of the solar semidiurnal pressure oscillation. Sci. Rep. **6**, project 122, New York University, Dept. of Meteorology and Oceanography.

HOLMBERG, E. R. R., 1952: A suggested explanation of the present value of the velocity of rotation of the earth. Mo. Not. Roy. Astr. Soc., Geoph. Sup., **6**, 325—330.

KUHLBRODT, E., 1938: Wiss. Erg. Deutsch. Atlant. Exp. Meteor 1925—1927, **14**, 292—300. Berlin and Leipzig.

LAMB, H., 1945: Hydrodynamics, 6th ed. Dover Publ., New York, Chap. VIII, art. 214.

PEKERIS, C. L., 1937: Atmospheric Oscillations. Roy. Soc. Proc., Ser. A., **158**, 650—671.

SHAW, N., 1936: Manual of Meteorology, **II.**, 2nd ed. Cambridge 1936.

SIMPSON, C. G., 1918: The twelve-hourly barometer oscillation. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., **44**, 1—10.

SOLBERG, H., 1936: Über die freien Schwingungen einer homogenen Flüssigkeitsschicht auf der rotierenden Erde, I. Astrophys. Norv. **1**, 7.

TAYLOR, G. I., 1936: The oscillations of the atmosphere. Roy. Soc. Proc., Ser. A., **156**, 318—326.

THOMSON, W., 1882: On the thermodynamic acceleration of the earth's rotation. Roy. Soc. Edinb. Proc., **11**, 396—405.

WILKES, M. V., 1949: Oscillations of the Earth's Atmosphere. Cambridge University Press.

WILKES, M. V., 1951: The thermal excitation of atmospheric oscillations. Proc. Roy. Soc. Lond., Ser. A, **207**, 358—370.

551.524.7

(Meteorological Service, Hakyria, Israël)

Latitudinal Variation of Tropospheric Temperature Lapse Rate.

By

J. Neumann.

Summary. The latitudinal variation of tropospheric temperature lapse rate is examined on the basis of recently published data for the northern hemisphere. In January, the lapse rate systematically decreases from 6.4°C/km. for the equator to 3.6°C/km. for 70°N; in July, the lapse rate is nearly constant in respect of latitude between the equator and 50°N, but decreases from the latter poleward. The average January—July lapse rate decreases systematically from 6.3°C/km. for the equator to 4.7°C/km. for 70°N. This variation is closely described by the equation $\beta\varphi = 6.25 - 2\sin^4\varphi$, where $\beta\varphi$ is the lapse rate, in °C/km, for latitude φ. For the north pole, the equation gives a lapse rate of 4.25°C/km.

Zusammenfassung. Die Änderung des vertikalen Gradienten der Troposphärentemperatur mit der geographischen Breite wird auf Grund neuen Zahlenmaterials für die Nordhemisphäre untersucht. Im Januar nimmt der Temperaturgradient allmählich von 6.4°C/km am Äquator bis zu 3.6°C/km in 70°N Breite ab; im Juli ist der Temperaturgradient in den Breiten zwischen dem Äquator und 50°N Breite fast gleich und nimmt von hier aus polwärts ab. Der mittlere Temperaturgradient für Januar—Juli nimmt allmählich von 6.3°C/km am Äquator bis auf 4.7°C/km in 70°N Breite ab. Die Breitenabhängigkeit läßt sich gut durch die Gleichung $\beta\varphi = 6.25 - 2\sin^4\varphi$ darstellen, in der $\beta\varphi$ der Temperaturgradient in °C/km in der Breite φ ist. Für den Nordpol ergibt die Gleichung einen Temperaturgradienten von 4.25°C/km.

Résumé. La variation latitudinale du gradient thermique vertical de la température troposphérique est examinée en se basant sur des données publiées récemment pour l'hémisphère nord. En janvier, le gradient diminue systématiquement d'une valeur de 6.4°C/km pour l'équateur à 3.6°C/km pour 70°N; en juillet le gradient est presque constant pour les latitudes situées entre l'équateur et 50°N, mais il diminue d'ici vers le pôle. Le gradient moyen janvier/juillet diminue systématiquement de 6.3°C/km pour l'équateur à 4.7°C/km pour 70°N. Cette variation peut être représentée par l'équation $\beta\varphi = 6.25 - 2\sin^4\varphi$ où $\beta\varphi$ est le gradient en °C/km pour la latitude φ. Pour le pôle nord, l'équation donne un gradient de 4.25°C/km.

It is usually stated in meteorological texts as well as in various papers that in the troposphere the average lapse rate of temperature is almost constant with respect to latitude. However, a consideration of the latitudinal distribution of heat balance and of some recent theoretical investigations in hydrodynamics (e. g., CHANDRASEKHAR 1953) has suggested that there might be a systematic latitudinal variation in the value of tropospheric lapse rate. Table I has been prepared to examine this point.

In Table I, the lapse rate values have been computed from WEXLER's (1951) cross-sections of the temperature field in the troposphere and the lower stratosphere between 5° and 75°N for January and July, respectively. These cross-sections appear to be the most recent and complete summaries of the relevant data. In these charts, the surface-temperature data were taken from HANN-SÜRING (1943), the free-air temperature data were assembled and processed at the U. S. Weather Bureau from all figures available at the time and the latitudinal averages of tropopause height are from FLOHN (1947). In our Table, the data for the equator which do not appear in WEXLER's paper, have been obtained by taking (a) the surface temperature value directly from HANN-SÜRING (1943, p. 180), (b) the tropopause height directly from FLOHN (1947), and (c) the temperature at the tropopause as — 80°C. The latter figure is based on various longitudinal atmospheric cross-sections published in the recent literature and on the fact that in WEXLER's charts, which terminate at 5°N, the equatorial tropopause appears to be within the —75°C isotherm with the temperature values decreasing inward.

Table I. *Tropospheric temperature lapse rates.*

T_s and T_t surface and tropopause temperatures, respectively, in °C,
H height of tropopause, in km.
β lapse rate, in °C/km.

Latitude, °N	January				July				Annual	
	T_s	T_t	H	β	T_s	T_t	H	β	$\left[\frac{(D)+(H)}{2}\right]$	β [From(2)]
	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)	(I)	(J)
0	26	— 80	16.6	6.4	26	— 80	16.9	6.3	6.3	6.3
10	26	— 76	16.4	6.2	27	— 77	16.8	6.2	6.2	6.2
20	22	— 72	15.6	6.0	28	— 75	16.3	6.3	6.2	6.2
30	15	— 63	13.4	5.8	27	— 68	14.9	6.4	6.1	6.1
40	5	— 57	11.2	5.5	24	— 58	13.1	6.2	5.9	5.8
50	— 7	— 56	9.8	5.0	18	— 53	11.5	6.2	5.6	5.6
60	— 16	— 56	9.2	4.3	14	— 49	10.4	6.0	5.2	5.1
70	— 26	— 57	8.6	3.6	7	— 46	9.5	5.7	4.7	4.7
80										4.4
90										3.6

It is seen from Table I that (a) in winter, the tropospheric lapse rate systematically decreases from its value for the equator to its value for the high latitudes, (b) in summer, the lapse rate is practically constant

for the zone between the equator and the middle latitudes but decreases poleward from the latter, and (c) the annual (January—July) averages, which are dominated by the winter values, show also a systematic decrease from the equator toward the pole.

The lapse rate figures in Table I, depend of course on the figures adopted for the height of the tropopause. Generally, different writers give different figures for this. For instance, the tropopause heights adopted by GOODY (1949), which are due to SAWYER and DEWAR, are for the extra-tropical latitudes substantially lower than those presented by FLOHN. But as both sets of figures give the average height of the tropopause as decreasing poleward, the resulting lapse rate figures would indicate the same trend provided that WEXLER's temperature data are retained. The lapse rate figures for the middle latitudes are probably subject to a greater uncertainty than those for the other latitudes because of the difficulty of defining an average height for the mid-latitude tropopause which is usually of a leaf-like structure.

Let β_φ stand for the average annual tropospheric lapse rate, in ^{0}C/km., for latitude φ. Fitting, by least squares, to the data in column (I) of Table I, a function of the form

$$\beta_\varphi = a + b \sin^2 \varphi + c \sin^4 \varphi, \tag{1}$$

gives a = 6.24, b = 0.02 and c = — 1.99, so that, after some slight rounding off,

$$\beta_\varphi = 6.25 - 2 \sin^4 \varphi. \tag{2}$$

The reason for taking in (1) only even powers of sin φ is in that, barring differences in the land-sea distribution, the value of the lapse rate should not depend on the sign of φ (northern or southern hemisphere).

The hemispherical average of the lapse rate is obtained from the integral

$$\int_0^{\pi/2} \beta_\varphi \cos \varphi \, d\varphi. \tag{3}$$

Inserting (2) in (3) yields that the hemispherical average of β_φ is 5.85^{0}C/km. which is slightly less than the figures most often cited in literature.

References.

CHANDRASEKHAR, S.: 1953 *Proc. Roy. Soc.* A, **217**, 306.
FLOHN, H.: 1947 *Meteorol. Rdsch.*, 1, 26.
GOODY, R. M.: 1949 *Proc. Roy. Soc.* A, **197**, 487.
HANN, J. und SÜRING, R.: 1943 *Lehrbuch der Meteorologie* 5. Aufl. Bd. 1. Leipzig.
WEXLER, H.: 1951 *Tellus*, **2**, 262.

551.571.4 (26)

Wasserdampfschichtung über dem Meer und „Rauhigkeit" der Meeresoberfläche*.

Von

K. Brocks, Hamburg.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden die Schwierigkeiten erörtert, die der Anwendung der PRANDTLschen Mischungswegtheorie auf das Problem der maritimen Verdunstung und der Windreibung an der Meeresoberfläche entgegenstehen. Sie sind bedingt einerseits durch die Windabhängigkeit der Oberflächenform des Meeres, andererseits durch die meistens herrschende nichtadiabatische Temperaturschichtung, für die die PRANDTLschen Gleichungen und alle aus ihnen abgeleiteten nicht gelten.

Es wird der Einfluß der vertikalen Temperaturschichtung auf den Verdunstungskoeffizienten gezeigt und auf die Fälschungen hingewiesen, die entstehen können, wenn man den hydrodynamischen Charakter der Meeresoberfläche untersucht, ohne die Temperaturschichtung zu beachten.

Aus 164 Vertikalprofilen der Wasserdampfschichtung über dem Meer (Ostsee, Atlantik, Pazifik), die veröffentlicht vorliegen, wird die Abhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten von der Windgeschwindigkeit und von der vertikalen Temperaturschichtung untersucht, und es werden adiabatische Werte des Verdunstungskoeffizienten abgeleitet. Diese nehmen mit der Windgeschwindigkeit zu von Werten, die etwa hydrodynamisch glatten Grenzflächen bei kleinen Windgeschwindigkeiten entsprechen, bis zu solchen über einer rauhen Fläche, deren Rauhigkeitsparameter mit der Windstärke wächst. Eine kritische Windgeschwindigkeit wird nicht beobachtet; der Übergang zu größerer Rauhigkeit scheint stetig vor sich zu gehen. Ergebnisse anderer Autoren werden diskutiert.

Summary. Difficulties in applying PRANDTLs mixing length theory to the problem of maritime evaporation and of wind friction at the surface of the ocean are discussed. They are due, on the one hand, to the surface form of the ocean being dependent on the wind and on the other hand to the prevailing non-adiabatic temperature distribution for which PRANDTLs equations and all those derived from them are not valid. The influence of the vertical temperature distribution on the evaporation coefficient is shown and the errors are indicated likely to arise if the hydrodynamic character of the surface of the ocean is studied without taking account of the temperature distribution. On the basis of 164 vertical profiles of the water vapor distribution above the ocean (Baltic Sea, Atlantic, Pacific) taken from publications the dependence of the evaporation coefficient on wind velocity and vertical temperature distribution is examined. Furthermore adiabatic values

* Herrn o. ö. Prof. Dr. Georg WÜST, Direktor des Institutes für Meereskunde, Kiel, zum 65. Geburtstag gewidmet.

of the evaporation coefficient are deduced. These are shown to increase with the wind velocity from values corresponding to a hydrodynamically smooth boundary surface in case of small wind velocities to such occurring over a rough surface the roughness parameter of which is growing with the wind velocity. No critical wind velocity can be observed; the transition to greater roughness seems to be steady. Results found by other authors are discussed.

Résumé. L'auteur mentionne les difficultés que rencontre l'application de la théorie du parcours de mélange de PRANDTL au problème de l'évaporation marine et du frottement du vent à la surface de la mer. Ces difficultés sont conditionnées d'une part par l'effet de la forme de la surface liquide sur le vent et d'autre part par la stratification thermique de l'air, en général non adiabatique, et pour laquelle les équations de PRANDTL et toutes celles qu'on en déduit ne sont pas valables.

On montre l'influence de la stratification thermique verticale sur la valeur du coefficient d'évaporation et les erreurs pouvant se produire lorsqu'on étudie le caractère hydrodynamique de la surface de la mer sans considérer la stratification thermique.

164 profils verticaux de la teneur en vapeur d'eau au-dessus de la mer (Mer Baltique, océans Atlantique et Pacifique) permettent d'étudier le coefficient d'évaporation en fonction de la vitesse du vent et de la stratification thermique; on en déduit des valeurs adiabatiques de ce coefficient. Ces valeurs croissent avec la vitesse du vent en partant du cas d'une surface liquide unie jusqu'à celui d'une surface rugueuse et dont le paramètre de rugosité croît avec le vent. On n'observe pas de vitesse critique du vent, le passage à de plus fortes rugosités paraissant se faire d'une manière continue. Discussion de résultats d'autres auteurs.

I. Vorbemerkung.

Die vertikale Schichtung des Wasserdampfgehaltes der Luft über dem Meer ist von verschiedenartigen Gesichtspunkten her von Interesse. Sie ist wegen ihrer Beziehung zur maritimen Verdunstung ein wesentliches Hilfsmittel für die Bestimmung dieses wichtigen Gliedes des atmosphärischen Wärmehaushaltes. Wegen ihres Einflusses auf die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in der Unterschicht der Atmosphäre ist sie im optischen Bereich von Bedeutung für die Genauigkeit der Höhenmessung über See, im Bereich der cm-Wellen für die Reichweite der Schiffsradargeräte und für die Güte der drahtlosen Nachrichtenübermittlung.

Leider sind unsere Kenntnisse hierüber zur Zeit noch sehr unvollständig, weil bisher nur eine geringe Anzahl von Wasserdampfprofilmessungen, d. h. von Messungen der Luftfeuchtigkeit in verschiedenen Höhen über der Meeresoberfläche, vorhanden ist. Es wäre deshalb ein wesentlicher Fortschritt, wenn es gelänge, Beziehungen zu den meteorologischen Elementen herzustellen, die auf Grund der seit vielen Jahrzehnten an Bord von Handels- und Expeditionsschiffen, neuerdings auch von Wetterschiffen durchgeführten Beobachtungen in großer Zahl vorliegen, nämlich der Wassertemperatur T_w einerseits, der Lufttemperatur T_1, der Windgeschwindigkeit u_1 und des Wasserdampfdruckes e_1 in einem bestimmten Niveau z_1 andererseits. Wenn solche Beziehungen bekannt wären, könnte dieses große und mit vieler Mühe gewonnene Material sowohl für das meteorologische Grundproblem — die atmosphärische

Energiebilanz — als auch für die erwähnten praktischen Fragestellungen nutzbar gemacht werden.

Es fehlt nicht an Versuchen — theoretischer und empirischer Art —, solche Beziehungen aufzufinden. Verschiedene Autoren haben mit einer derartigen Absicht das bisher vorliegende Material an Wasserdampfprofilmessungen über See bearbeitet [*1, 2, 3*]. Wenn im Folgenden der Versuch gemacht wird, diesen Bearbeitungen eine weitere hinzuzufügen, ohne zunächst neues Beobachtungsmaterial vorzulegen, so möge dies damit gerechtfertigt sein, daß in den bisherigen Arbeiten der Einfluß der Temperaturschichtung auf den Zustand der atmosphärischen Grenzschicht zwar erwähnt, aber nicht mit der Konsequenz berücksichtigt wurde, die nach unseren heutigen Kenntnissen erforderlich ist, wenn man Fehlschlüsse vermeiden will.

II. Die Höhenfunktionen austauschbarer atmosphärischer Eigenschaften bei adiabatischer Temperaturschichtung und die Prandtlsche Theorie der atmosphärischen Grenzschicht.

Durch zahlreiche Beobachtungen vertikaler Wind- und Wasserdampfprofile in der Grenzschicht der Atmosphäre, d. h. in ihrem untersten Bereich mit starken vertikalen Gradienten der austauschbaren Eigenschaften, konnte nachgewiesen werden [*4, 5* u. a.], daß sich immer dann logarithmische Höhenfunktionen einstellen, wenn die gleichzeitig herrschende vertikale Temperaturschichtung adiabatisch ist, d. h. wenn keine zusätzlichen Vertikalbeschleunigungen auftreten.

Für die horizontale Windgeschwindigkeit stimmt dieser Beobachtungsbefund mit dem universalen Geschwindigkeitsgesetz PRANDTLs für Rohrströmungen überein, das sich aus zahlreichen hydraulischen Versuchen mit Flüssigkeits- und Gasströmungen in Rohren ergeben hat [*6*]. Es gilt für hydrodynamisch glatte Rohre die Gleichung

$$u = \frac{u_*}{k} ln \left(\frac{z\, u_*}{c\, \nu} \right) \tag{1}$$

und für hydrodynamisch rauhe Rohre folgende

$$u = \frac{u_*}{k} ln \left(\frac{z}{z_0} \right). \tag{2}$$

Hierbei bedeutet:

ln den natürlichen Logarithmus,

u die horizontale Geschwindigkeit der Strömung [cm sec^{-1}],

$u_* = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}$ die sogenannte Schubspannungsgeschwindigkeit [cm sec^{-1}],

τ den Tangentialdruck, den die Strömung auf eine Fläche ausübt, die parallel zur mittleren Strömungsrichtung orientiert ist, und dessen Randwert τ_0 bei hydraulischen Experimenten leicht gemessen werden kann [g cm^{-1} sec^{-2}],

z den Wandabstand [cm],

ϱ die Dichte des strömenden Mediums [g cm^{-3}],

k eine nach KÁRMÁN [*7*] genannte dimensionslose Konstante, deren Wert sich aus den hydraulischen Messungen zu 0,38 bis 0,45 ergab [*8*] und jetzt meist mit 0,40 angesetzt wird,

c eine weitere dimensionslose Konstante, für die sich aus den Rohrströmungen der Wert 0.122 ergab,

ν die kinematische Zähigkeit [$cm^2\ sec^{-1}$],

z_0 eine für Rohrwandungen bestimmter Rauhigkeit charakteristische Konstante von der Dimension einer Länge, die als Rauhigkeitsparameter bezeichnet wird und deren Wert von der Größe der Rauhigkeitselemente, ihrem gegenseitigen Abstand, ihrer eventuellen Beweglichkeit und ihrer Form abhängt. Bei künstlich hergestellter Sandrauhigkeit in Rohren betrug sie ein Dreißigstel des mittleren Korndurchmessers. Bei anderen Rauhigkeiten ändert sich diese Verhältniszahl.

Die Deutung und so fruchtbare Anwendung dieser Beziehungen auf meteorologische Probleme nahm PRANDTL bekanntlich mit seinem Mischungswegansatz vor [*9*]. C. G. ROSSBY und R. B. MONTGOMERY [*10*] brachten die Gleichung (5) in die Form

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z + z_0}{z_0}, \tag{3}$$

die einen Übergang in das Niveau z = 0 ermöglicht. Für den vertikalen Gradienten der horizontalen Windgeschwindigkeit und die Schubspannung τ_0 an der unteren Grenzfläche folgen, wenn man annimmt, daß die Schubspannung sich nicht mit der Höhe ändert, die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_1}{\ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}} \frac{1}{z + z_0} \tag{4}$$

und

$$\tau_0 = \frac{\varrho\, k^2}{\left(\ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)^2} u_1^2\,; \tag{5}$$

dabei bedeutet:

z_1 ein festes Niveau,

u_1 den Geschwindigkeitsunterschied zwischen dem Niveau $z = 0$ und $z = z_1$, wobei angenommen wird, daß das strömende Medium an der Grenzfläche haftet,

τ_0 den Wert der Schubspannung im Niveau $z = 0$.

Unter Annahme gleicher Austauschkoeffizienten A für Wasserdampf und Impuls und unter der Voraussetzung, daß sich innerhalb der betrachteten Schicht auch der vertikale Wasserdampfstrom nicht mit der Höhe ändert, ergeben sich hieraus mit Hilfe der Grundgleichungen für den Austausch von Impuls und Wasserdampf

$$\tau = A \frac{\partial u}{\partial z} \tag{6}$$

$$V = -A \frac{\partial q}{\partial z} \tag{7}$$

folgende analoge Beziehungen für den vertikalen Gradienten der spezifischen Feuchtigkeit q und die Verdunstung V_0

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\Delta q_1}{\ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}} \frac{1}{z + z_0} \tag{8}$$

$$V_0 = -\frac{\varrho\, k^2}{\left(\ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}\right)^2} u_1 \Delta q_1; \tag{9}$$

dabei bedeutet:

A den Austauschkoeffizienten [g cm^{-1} sec^{-1}],

q die spezifische Feuchte [g Wasserdampf pro Gramm feuchter Luft],

V_o die Wassermenge, die pro Quadratzentimeter und Sekunde aus der Grenzfläche verdunstet [g cm^{-2} sec^{-1}],

Δq_1 den Unterschied der spezifischen Feuchtigkeit $\Delta q_1 = q_1 - q_o$ zwischen den Niveaus z_1 und $z = 0$. Die Festlegung des Niveaus $z = 0$ bedarf bei rauhen Grenzflächen besonderer Überlegung.

Für hydrodynamisch glatte Flächen ergeben sich, ausgehend von Gleichung (1) und mit Hilfe der Modellvorstellung einer laminaren Grenzschicht ohne Turbulenz hart an der Grenzfläche, entsprechende Beziehungen. Die Gleichungen für rauhe Grenzflächen erfahren eine Komplizierung, wenn man von weniger einfachen Vorstellungen bezüglich des Überganges von der Grenzfläche in die Atmosphäre bzw. bezüglich der Impulsübertragung ausgeht (siehe z. B. MONTGOMERYs Zwischenschichtansatz [*1*]). Wir können hier auf die Darstellung von Einzelheiten verzichten und auf die zusammenfassende Veröffentlichung von H. U. SVERDRUP [*3*] verweisen.

Alle diese Gleichungen bedeuten zunächst nur eine theoretische Übertragung der Rohrströmungsergebnisse auf die Atmosphäre, und sie sind beschränkt auf die Voraussetzung, unter denen auch diese Ergebnisse abgeleitet wurden, d. h. auf den Fall fehlender Dichteschichtung, bzw. in der Atmosphäre auf adiabatische Temperaturschichtung. Diese Übertragung stellt eine Verallgemeinerung dar, die einer Bestätigung durch die Beobachtungen bedarf, weil prinzipielle Unterschiede zwischen den Verhältnissen bei hydraulischen Versuchen im Strömungslaboratorium und denjenigen in der Grenzschicht der Atmosphäre bestehen, insbesondere auch wegen des Fehlens einer oberen Grenzfläche. In Ermangelung von Schubspannungs- und exakten Verdunstungsmessungen konnte eine solche Bestätigung, wie bereits erwähnt, zunächst nur qualitativ darin gesehen werden, daß die theoretisch verlangten logarithmischen Höhenprofile der Windgeschwindigkeit und der spezifischen Feuchtigkeit sich in der unteren Atmosphäre tatsächlich einstellen.

In den letzten Jahren konnte ein solcher Nachweis auch quantitativ geführt werden durch eine — allerdings kleine — Anzahl von Schubspannungsmessungen an der Erdoberfläche. Diese Messungen wurden (gleichzeitig mit Beobachtungen des vertikalen Windprofils) von P. A. SHEPPARD [*11*] an einer Fläche geringer Rauhigkeit (Meßplatte aus Aluminium, Umgebung Betonoberfläche) und von F. PASQUILL [*12*] an einer Fläche größerer Rauhigkeit (Pfanne mit Erde und kurzem Gras in entsprechender Umgebung) durchgeführt und ergaben Werte der Konstante k zwischen 0.37 und 0.45. Zwar ist so immer noch eine Unsicherheit von etwa $\pm 10\%$ im Wert der Konstanten vorhanden; durch diese Ergebnisse dürfte aber doch nachgewiesen sein, daß man die KÁRMÁNsche Konstante als allgemeine Turbulenzkonstante ansehen kann, deren Anwendung auf die Atmosphäre erlaubt ist. Damit ist auch die Gültigkeit des PRANDTLschen Ansatzes innerhalb der atmosphärischen Grenzschicht für den Fall adiabatischer Temperaturschichtung erwiesen.

III. Schwierigkeiten der Anwendung der Prandtlschen Theorie auf die maritime atmosphärische Grenzschicht.

Gleichungen, die auf der Grundlage der Prandtlschen Theorie beruhen, sind verschiedentlich verwendet worden für die Bestimmung der maritimen Verdunstung als Teilglied des atmosphärischen Energiehaushaltes [u. a. *13*] und für die Berechnung der Schubspannung, die der Wind als Ursache der winderzeugten Meeresströmungen auf die Meeresoberfläche ausübt [u. a. *14*]. Diese Tatsache darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß die Anwendung der Prandtlschen Theorie auf erhebliche Schwierigkeiten stößt, wenn es sich um maritim-meteorologische Probleme handelt.

Diese Schwierigkeiten liegen z. T. darin, daß die Gestalt der Meeresoberfläche von der Geschwindigkeit und dem Turbulenzzustand der darüber strömenden Luft abhängig ist, daß sie mit dieser Strömung bewegt wird und daß ihre Rauhigkeit Wellenstruktur besitzt und nicht eindeutig definierbar ist.

Über den hydrodynamischen Charakter der Meeresoberfläche gehen deshalb die Meinungen auseinander, und wegen der engen Beziehung zwischen der Verdunstung und der Turbulenz der Luft wird dadurch auch das Verdunstungsproblem berührt. F. Model [*15*] kam auf Grund einer zusammenfassenden Bearbeitung von Windprofilmessungen und mit Hilfe der Palménschen Windstauuntersuchungen zu dem Ergebnis, daß das Meer eine hydrodynamisch rauhe Oberfläche mit dem konstanten Rauhigkeitsparameter $z_0 = 2$ cm habe. C. G. Rossby [*16*] zog aus verschiedenartigen Messungen (Windprofile, Abweichung von Richtung und Stärke des Gradientwindes, Windstau) den Schluß, daß die Meeresoberfläche sich bei kleinen Windgeschwindigkeiten wie eine hydrodynamisch glatte Fläche verhalte, bei mittleren und starken Windgeschwindigkeiten aber unter stationären Verhältnissen wie eine hydrodynamisch rauhe Fläche „mit einem Rauhigkeitsparameter z_0 in der Nähe von 0.6 cm". H. M. Munk stützte diese Ansicht Rossbys durch weitere Argumente und legte die „kritische Windgeschwindigkeit" bei etwa 6 bis 7 m/sec fest [*17*]. Windprofilmessungen, die H. U. Roll über dem Wattenmeer durchführte, ergaben für den Windgeschwindigkeitsbereich von etwa 2 bis 9 m/sec sehr kleine Rauhigkeitsparameter (z_0 zwischen 0.006 und 0.002 cm), die analog zu dem Verhalten einer hydrodynamisch glatten Grenzfläche mit wachsender Windgeschwindigkeit schwach abnehmen [*18*]. G. Neumann leitete dagegen aus Windstaumessungen Rauhigkeitsparameter ab, die mit wachsender Windgeschwindigkeit abnehmen von etwa 5 cm bei 2 m/sec bis etwa 0.1 cm bei 25 m/sec [*19*]. R. B. Montgomery hat über diese und andere unterschiedliche Ergebnisse zusammenfassend berichtet [*20*].

Weitere Schwierigkeiten treten dadurch auf, daß die Geschwindigkeitsdifferenz u_1 und die Feuchtedifferenz Δq_1, die in den Gleichungen benötigt werden, nicht einfach feststellbar sind. u_1 ist die horizontale Geschwindigkeit der Luft gegenüber der Meeresoberfläche, die ihrerseits

bewegt ist. Meistens ist diese Bewegung der Grenzfläche nicht bekannt und kann auf offener See auch nur schwer gemessen werden. Man behilft sich deshalb dadurch, daß man für u_1 die Windgeschwindigkeit selbst einsetzt. Diese ist entweder gemessen oder wird mit Hilfe des Aussehens der Meeresoberfläche in der Beaufortskala geschätzt. Bei der hierdurch notwendigen Umrechnung treten neuerliche Komplikationen auf, weil der Umrechnungsfaktor von Beaufortgraden in m/sec für eine bestimmte Höhe nicht sicher bekannt ist (siehe H. U. Roll in [*21*]). Die Feuchtigkeit q_o an der Grenzfläche ist noch schwieriger bestimmbar. Man pflegt statt ihrer die Sättigungsfeuchte q_w einzusetzen, die der gemessenen Wassertemperatur T_w entspricht, wobei man annimmt, daß diese der Lufttemperatur unmittelbar an der Grenzfläche gleich ist und daß die Luftfeuchtigkeit hier 100% beträgt. Hierbei bleibt unsicher, ob die gemessene Wassertemperatur mit derjenigen der Grenzfläche übereinstimmt und ob die Luft an der Meeresoberfläche im Flächenmittel tatsächlich gesättigt ist.

Wegen der unregelmäßigen Gestalt der Meeresoberfläche, die aus einer Überlagerung von Wellen ganz verschiedener Größenordnung besteht, ist ferner die Wahl des Nullniveaus der Höhenkoordinate strittig im Gegensatz zu den meist besser definierten Rauhigkeiten des Festlandes (siehe Diskussion zwischen Roll und Neumann [*18*, *22*]). Dadurch können bei der Deutung von Profilmessungen, die in geringen Wasserabständen durchgeführt werden, Unsicherheiten in bezug auf die Größe des Rauhigkeitsparameters auftreten.

Wir sehen also, daß selbst im einfachen Fall adiabatischer Temperaturschichtung eine Fülle von Schwierigkeiten auftritt, wenn man die auf dem Festland gewonnenen Ergebnisse der atmosphärischen Austauschforschung auf maritim-meteorologische Fragestellungen anwenden will. Diese Schwierigkeiten kann man nur durch möglichst zahlreiche Beobachtungen mit Hilfe von Profilmessungen, Windstaumessungen usw. zu lösen versuchen.

Um so unangenehmer ist es, daß die Auswertung solcher Beobachtungen durch eine weitere Komplikation erschwert wird. Diese liegt darin, daß neben den übrigen Einflüssen die vertikale Temperaturschichtung als wesentlicher Parameter mitberücksichtigt werden muß. Alle bisher vorgenommenen Versuche, die maritime Verdunstung und die Windreibung an der Meeresoberfläche zu erfassen, gehen aber auf die Prandtlschen Ansätze, d. h. letztlich auf die obigen Gleichungen (1 und 2), zurück, und deren Gültigkeit ist auf den Fall adiabatischer Temperaturschichtung beschränkt.

Dieser Tatsache wurde bisher in keiner der oben zitierten Untersuchungen genügend Rechnung getragen, und es ist sehr gut möglich, daß zum mindesten ein Teil der angedeuteten Diskrepanzen sich auflöst, wenn man die Temperaturschichtung als Parameter nicht mehr außer acht läßt.

Wir wollen deshalb im folgenden abschätzen, welche Fälschungen entstehen können, wenn man die obigen Gleichungen auf Beobachtungen anwendet, die bei nichtadiabatischer Temperaturschichtung gewonnen wurden.

IV. Der Einfluß der Temperatur- und Windschichtung auf die Höhenfunktionen der meteorologischen Elemente in der atmosphärischen Grenzschicht.

Mit dem Anwachsen des Materials an Profilmessungen der Windgeschwindigkeit, der Luftfeuchtigkeit und der Lufttemperatur in Bodennähe zeigte sich, daß logarithmische Höhenprofile auf den Fall adiabatischer Temperaturschichtung beschränkt sind [*23*, *24*, *25* u. a.]. Bei nichtadiabatischer Schichtung treten systematische Abweichungen auf. Der vertikale Gradient der betreffenden Eigenschaft nimmt bei „Labilität" (so wollen wir der Kürze halber den Zustand überadiabatischer Temperaturschichtung bezeichnen) schneller, bei Stabilität langsamer mit der Höhe ab als bei adiabatischer Schichtung. Und das ist um so ausgeprägter der Fall, je geringer die horizontale Windgeschwindigkeit ist.

Die theoretische Erfassung dieser komplizierten Wechselwirkung zwischen der Windscherung und der Temperaturschichtung, d. h. zwischen der dynamischen und der thermischen Komponente der Turbulenz, ist eines der schwierigsten Probleme der atmosphärischen Austauschforschung, insbesondere auch wegen des Einsetzens von Konvektion bei genügend großer „Labilität". So führten frühere Ansätze [u. a. *5*, *9*, *10*] nicht zu befriedigenden theoretischen Lösungen. H. Lettau gelang es mit seiner Theorie der nicht-adiabatischen Turbulenz erstmalig, die beobachteten Höhenfunktionen der austauschbaren meteorologischen Eigenschaften bei „Labilität" und Stabilität mit einem einheitlichen Ansatz anzunähern [*26*, *27*]. Allerdings berücksichtigt er den Einfluß der Konvektion ebenfalls nicht und beschränkt den Gültigkeitsbereich seiner Theorie auf geringe Abweichungen vom adiabatischen Zustand [*27*, S. 95].

Wir können den Einfluß der Temperaturschichtung auf die Höhenprofile aber auch unabhängig von theoretischen Erwägungen auf empirischem Wege abschätzen. Hierfür erweist sich die Annäherung der atmosphärischen Schichtung in Bodennähe durch Potenzfunktionen als zweckmäßig (siehe K. Brocks [*23*] und E. L. Deacon [*24*]). Wenn man folgende Form wählt — der Index 1 bezieht sich auf das Niveau z_1 und i bedeutet eine beliebige austauschbare Eigenschaft —

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_1 \left(\frac{z_1 + z_0}{z + z_0}\right)^{\beta}, \tag{10}$$

ist für den Übergang des Exponenten β in den Wert 1 (d. h. Annäherung an logarithmische Schichtung der Eigenschaft i) der Anschluß an den bewährten Prandtlschen Ansatz für hydrodynamisch rauhe Flächen gewährleistet.

Der Exponent β ist bei überadiabatischer Schichtung größer, bei unteradiabatischer Schichtung kleiner als 1. Diese Abweichung nimmt mit der Intensität der Temperaturschichtung zu, und zwar um so stärker, je kleiner die Windgeschwindigkeit ist. Deacon konnte zeigen [*24*], daß β eine Funktion der Richardsonschen Zahl ist. Um einen Einblick in die Schwankungsbreite des Exponenten zu bekommen, stellen wir β

in der Abb. 1 als Funktion des vertikalen Temperaturgradienten in 1 m Bodenabstand dar*. Hierbei handelt es sich um Exponenten der Höhenfunktionen der potentiellen Temperatur, die von dem Verfasser durch eine zusammenfassende Bearbeitung von Registrierungen des vertikalen Temperaturgradienten über grasbewachsenen Ebenen an zwei Orten in Südengland abgeleitet wurden [23]. Jeder Punkt stellt ein mehrjähriges Monatsmittel von Profilen dar, die an festen Tagesstunden beobachtet wurden, bzw. einen solchen Mittelwert aus Profilmessungen an klaren Tagen (Einzelheiten siehe in [28]). Da es sich um eine Zusammenfassung der Verhältnisse an verschiedenen Orten handelt und der Einfluß der Windgeschwindigkeit nicht abgetrennt werden konnte, ist die Streuung der Punkte nicht verwunderlich. Man sieht aber, mit welchen Werten des Exponenten β gerechnet werden muß, und die Abhängigkeit von der Größe des vertikalen Temperaturgradienten in Bodennähe zeichnet sich deutlich ab.

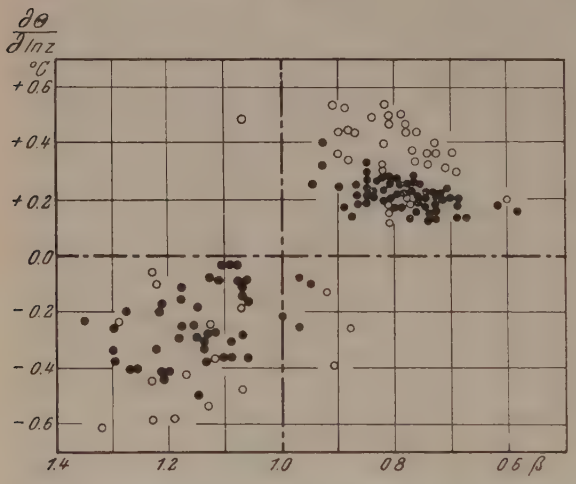


Abb. 1. Der Exponent β der Höhenfunktion $\frac{\partial\theta}{\partial z} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_1 \cdot \left(\frac{z_1+z_0}{z+z_0}\right)^{\beta}$ des vertikalen Gradienten der potentiellen Lufttemperatur θ in der bodennahen Luftschicht in Abhängigkeit vom gleichzeitigen logarithmischen Gradienten $\frac{\partial\theta}{\partial \ln z}$; beobachtet über grasbewachsenen Ebenen in Südengland. Ausgefüllte Kreise: mehrjährige Monatsmittelwerte der geraden Tagesstunden aller Tage; unausgefüllte Kreise: Stundenmittelwerte aus einigen klaren Tagen.

Eine nähere Analyse zeigt, daß die Abweichung von der logarithmischen Schichtung mit dem Bodenabstand wächst, d. h., daß der Exponent β nicht unabhängig von der Höhe ist. Dadurch wird deutlich, daß die Gleichung (10) nur als Interpolationsformel einer komplizierteren Abhängigkeit anzusehen ist. Sie leistet aber als empirische Annäherung der Beobachtungen doch gute Dienste und kann deshalb auch als Hilfsmittel für unsere Abschätzung des Einflusses der vertikalen Temperaturschichtung auf die Höhenfunktionen verwendet werden. Wenn man die vereinfachende Annahme macht, daß β sich mit der Höhe nicht ändert, erhält man durch Integration der Gleichung (10) zwischen $z = 0$ und z_1

* In der Abbildung 1 ist als Ordinate der logarithmische Gradient $\partial\theta/\partial lnz$ der potentiellen Lufttemperatur θ angegeben. Dieser ist zahlenmäßig gleich dem vertikalen Temperaturgradienten [Grad pro m] in der Höhe $z = 1$, z. B. im Wasserabstand $z = 1$ m.

die Differenz $\Delta i_1 = i_1 - i_o$, und deshalb kann (10) wie folgt umgeformt werden

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{(1-\beta)\ \Delta i_1}{(z_1 + z_0)^{1-\beta} - z_0^{1-\beta}} (z + z_0)^{-\beta}. \tag{11}$$

Diese Gleichung können wir auch so schreiben

$$\frac{\partial i}{\partial z} = \frac{(1-\beta)\ (z + z_0)^{1-\beta}}{(z_1 + z_0)^{1-\beta} - z_0^{1-\beta}} \frac{\Delta i_1}{z + z_0} \tag{12}$$

und dadurch wird die Analogie mit den Gleichungen (4) und (8) deutlich. Dem dort vorkommenden Faktor

$$\Gamma_{1,ad} = \frac{1}{ln \frac{z_1 + z_0}{z_0}} \tag{13}$$

entspricht hier

$$\Gamma_1 = \frac{(1-\beta)\ (z + z_0)^{1-\beta}}{(z_1 + z_0)^{1-\beta} - z_0^{1-\beta}} \tag{14}$$

und beide lassen sich auf die allgemeine Form bringen

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta i_1} \frac{\partial i}{\partial ln\, z}. \tag{15}$$

Diesen letzteren Ausdruck führte R. B. Montgomery unter der Bezeichnung „Verdunstungskoeffizient" in die Behandlung der maritimen Verdunstung ein [*1*], wobei für i die spezifische Feuchtigkeit q eingesetzt wird. Die Bestimmung dieses Koeffizienten wird z. Z. als das Kernproblem der maritimen Verdunstungsberechnung mit Methoden der atmosphärischen Austauschforschung angesehen (siehe den Bericht von H. U. Sverdrup [*3*]). Der untere Index 1 soll darauf hinweisen, daß der Koeffizient sich auf das Niveau z_1 bezieht, in dem die Eigenschaft i gemessen vorliegt, und wir fügten in der Gleichung (13) den Index „ad" hinzu, um daran zu erinnern, daß die Gültigkeit dieser Gleichung an die Voraussetzung adiabatischer Temperaturschichtung geknüpft ist.

Wenn der Verdunstungskoeffizient bekannt ist, kann im adiabatischen Fall das ganze Höhenprofil der betreffenden Eigenschaft berechnet werden. Im nichtadiabatischen Fall liefert er mit der Gleichung (12) diejenige logarithmische Höhenfunktion, die im Niveau z_1 mit dem vorgegebenen Profil zusammenfällt.

Bei adiabatischer Schichtung ist der Verdunstungskoeffizient nach Gleichung (13) durch den Rauhigkeitsparameter z_o gegeben, bei nichtadiabatischer Schichtung tritt eine starke Abhängigkeit von der Temperatur- und Windschichtung hinzu. Mit Hilfe der Schwankungsbreite des Exponenten β, die wir etwa der Abb. 1 entnehmen können, läßt sich die so verursachte Variabilität des Verdunstungskoeffizienten abschätzen. Hierzu kann die Abb. 2 dienen. In ihr sind die Werte des Verdunstungskoeffizienten (bezogen auf das Niveau $z_1 = 4$ m) graphisch dargestellt, die sich mit Hilfe der Gleichungen (13) und (14) für Exponenten β zwischen 0,7 und 1,3 ergeben, wenn für den Rauhigkeitsparameter

die Werte $z_0 = 0{,}01$, 0,1 und 1,0 cm eingesetzt werden. Während die dazugehörigen adiabatischen Werte des Verdunstungskoeffizienten 0,09, 0,12 und 0,17 betragen, bedingt die Temperaturschichtung eine Variation von Γ zwischen 0,01 und 0,36. Wenn man — entsprechend dem in den oben zitierten Arbeiten üblichen Verfahren — auf diese letzteren Werte eine für adiabatische Schichtung gültige Gleichung, also z. B. Gleichung (13) oder eine analoge für den Fall einer hydrodynamisch glatten Grenzfläche, anwendet und daraus Schlüsse auf den hydrodynamischen Zustand der Meeresoberfläche zieht, so kommt man zu einem völlig falschen Bild. An der rechten Ordinate der Abbildung 2 sind die dekadischen Logarithmen der auf diese Weise vorgetäuschten Rauhigkeitsparameter angegeben, die wir mit LETTAU [26] als „scheinbare Rauhigkeitsparameter z_0“ bezeichnen. Diese ergeben sich ebenfalls, wenn man z. B. ein Windprofil durch eine logarithmische Höhenfunktion annähert und durch Extrapolation den Rauhigkeitsparameter als die Höhe ermittelt, in der die Windgeschwindigkeit den Wert Null erreicht.

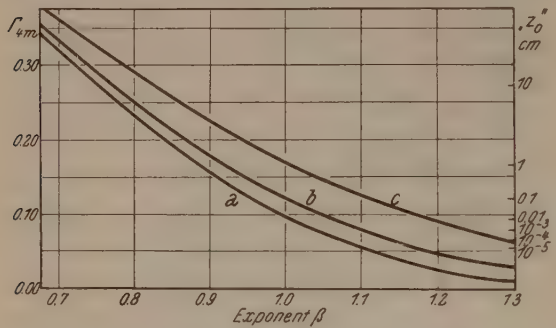


Abb. 2. Der Verdunstungskoeffizient $\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta i_1} \frac{\partial i}{\partial \ln z}$ (bezogen auf das Niveau 4 m) in Abhängigkeit von dem Exponenten β der Höhenfunktion $\frac{\partial i}{\partial z} = \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_1 \left(\frac{z_1 + z_0}{z + z_0}\right)^\beta$ des vertikalen Gradienten der betreffenden Eigenschaft, berechnet für die Rauhigkeitsparameter a) $z_0 = 0{,}01$ cm, b) $z_0 = 0{,}1$ cm und c) $z_0 = 1{,}0$ cm. „z_0“ ist der scheinbare Rauhigkeitsparameter, der sich ergibt, wenn man für den Fall $\beta \neq 1$ (nichtadiabatische Temperaturschichtung) auf den Verdunstungskoeffizienten die Gleichung (13) anwendet.

In der Abb. 3 ist dieses vielverwendete Verfahren graphisch dargestellt. Mit dem Logarithmus des Abstandes $z + z_0$ vom Nullniveau, der Differenz Δi_1 als Abszisse sind drei Höhenfunktionen der Eigenschaft i (Potenzfunktionen mit dem Exponenten β) entsprechend der Gleichung (11) wiedergegeben für einen Rauhigkeitsparameter $z_0 = 0{,}25$ cm und die Differenz $\Delta i_1 = 1{,}5$ (gemessen zwischen den Niveaus $z = 0$ und $z = z_1$). Für den Exponenten wurden die Werte 0,8 (Kurve a, stabile Temperaturschichtung), 1,0 (Gerade b, adiabatische Schichtung) und 1,2 (Kurve c, „labile“ Temperaturschichtung) ausgewählt, die Differenz 1,5 bezieht sich auf beliebige Einheiten (z. B. 1,5 m/sec, wenn i die Windgeschwindigkeit bedeutet, oder — 1,5 mb für den Wasserdampfdruck). Wenn man in diesem Diagramm die Kurven a und c tangential durch Geraden annähert, d. h. die betreffende Höhenfunktion durch eine logarithmische der gleichen Steigung ersetzt, so erhält man im Fall a stets zu große, im Fall b stets zu kleine Rauhigkeitsparameter. Dadurch täuscht der Einfluß der Temperaturschichtung einen Wechsel des hydrodynamischen Zustandes der Meeresoberfläche vor.

Tabelle 1. *Einzelheiten der Messungen der Temperatur- und Wasserdampfschichtung über dem Meer.*

Verfasser und Schiff	Meßort	Zeit	Anzahl*) der Meßreihen	Windgeschwindigkeitsbereich m/sec	Meßhöhen**) m	Instrumente
G. WÜST [29] „Senta" und Beiboot	Ostsee, Mecklenburger Bucht	7./8. IX. und 14./18. IX. 1919	35 (36)	0 — 9.4	0.2; 0.5; 1.2; 2.0 bzw. 2.5; 4.0; 6.0	Aspirationspsychrometer
R. B. MONTGOMERY [1] „Atlantis"	Atlantik im Dreieck Kap Hatteras-Bermudas-Neuschottland	21.7.—26.8. 1935	96 (101)	2.2 — 8.4	1(7); 1.5(42); 2(30); 4(101); 8(48); 38(101)	motorgetriebene Aspirationspsychrometer (eines mit Kippvorrichtung nach BÖHNECKE). In Maximalhöhe: Thermohygrograph
H. U. SVERDRUP [2] „Indianapolis"	Pazifik zwischen Kalifornischer Küste und Hawai	16.4.—9.7. 1937	33 (45)	3.2 — 15.4	5.8(3); 6.1(4); 6.2(37); 10.9 (18); 11.4(19); 15.2(4); 19.3 (33); 27.6(37); 30.6(3); 31.9(4).	Aspirationspsychrometer

*) Die obere Zahl gibt die Anzahl der Meßreihen an, die für die Untersuchung des Verdunstungskoeffizienten verwendet wurde.
**) In Klammern ist die Anzahl der Messungen in jeder Höhe angegeben.

Auf analoge Weise können sich Fälschungen einschleichen, wenn man Windstaumessungen als Funktion der Windgeschwindigkeit darstellt, ohne die gleichzeitig herrschende Temperaturschichtung zu berücksichtigen, oder wenn man Schubspannungs- oder Verdunstungswerte mit Hilfe der Gleichungen (5) und (9) aus Beobachtungen ableitet, die bei nichtadiabatischer Temperaturschichtung gewonnen wurden.

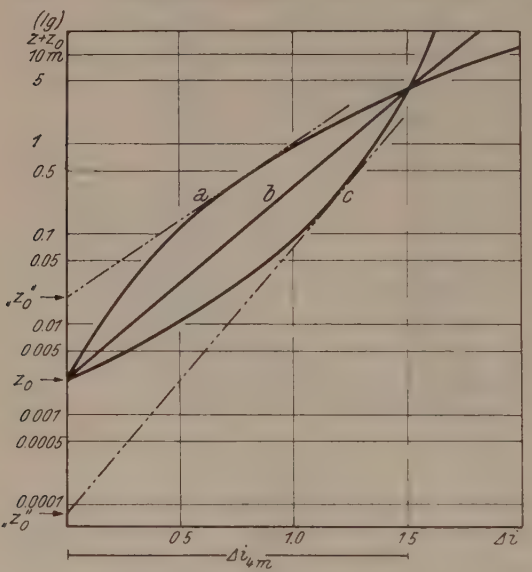


Abb. 3. Die Höhenfunktion

$$\Delta i = \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)_1 \left(\frac{z_1+z_0}{1-\beta}\right)^{\beta} \left[\left(z_1+z_0\right)^{1-\beta} - z_0^{\,1-\beta}\right],$$

$$\text{die aus } \frac{\partial i}{\partial z} = \left(\frac{\partial i}{\partial z}\right)^1 \left(\frac{z_1+z_0}{z+z_0}\right)^{\beta} \qquad (10)$$

folgt, dargestellt für $\Delta i = 1{,}5$ m bei $z_1 = 4$ m, $z_0 = 0{,}0025$ m und folgende Werte des Exponenten β:
$\beta = 0{,}8$ (stabile thermische Schichtung, Kurve *a*),
$\beta = 1$ (adiabatische Schichtung, Gerade *b*),
$\beta = 1{,}2$ („labile" thermische Schichtung, Kurve *c*).
i ist eine beliebige austauschbare atmosphärische Eigenschaft (1,5 kann also z. B. bedeuten 1,5 mb beim Wasserdampfaustausch, 1,5 m/sec beim Impulsaustausch o. ä.). Die Ordinate $z+z_0$ ist logarithmisch dargestellt, z_0 ist der Rauhigkeitsparameter, „z_0" der scheinbare Rauhigkeitsparameter, der sich bei Vernachlässigung des Einflusses der thermischen Schichtung ergibt.

Ein instruktives Beispiel für solche Fälschungen ist in der bereits zitierten Untersuchung von P. A. SHEPPARD [*11*] enthalten. In ihr leitet dieser eine Abhängigkeit der KÁRMÁN-Konstante von der Temperaturschichtung ab, die dadurch vorgetäuscht wird, daß die beobachteten Windprofile ohne Rücksicht auf die Temperaturschichtung durch logarithmische Höhenprofile angenähert wurden.

Wir werden im folgenden versuchen, mit Hilfe des vorhandenen Beobachtungsmaterials der Wasserdampfschichtung über dem Meer die Abhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten von der Windgeschwindigkeit und der thermischen Schichtung abzuleiten und Werte des adiabatischen Verdunstungskoeffizienten zu bestimmen. Denn nur auf diese Weise erhalten wir die experimentelle Grundlage für eine Anwendung der PRANDTLschen Theorie und für eine Bestimmung der vertikalen Wasserdampfschichtung über dem Meer auch außerhalb ihres Gültigkeitsbereiches.

V. Wasserdampfprofilmessungen über dem Meer (das Material).

Für eine solche Untersuchung steht zur Zeit nur ein begrenztes Material zur Verfügung. Es handelt sich um Beobachtungsserien, die über der Ostsee (G. WÜST [*29*]), über dem Atlantik (R. B. MONTGOMERY

[*1*]) und über dem Pazifik (H. U. Sverdrup [*2*]) gewonnen und in den bereits zitierten Veröffentlichungen [*1, 2, 3*] benutzt wurden. Die näheren Umstände dieser Beobachtungen können aus der Tabelle 1 entnommen werden, in bezug auf Einzelheiten wird auf die Originalveröffentlichungen verwiesen.

Es liegen 200 Profile der Lufttemperatur und des Wasserdampfdrucks vor für Wasserabstände von 0,2 bis 6 m (Ostsee), 1,5 bis 38 m (Atlantik) und von 6 bis 30 m (Pazifik). Ferner wurde die Wassertemperatur T_w und die Windgeschwindigkeit u_1 gemessen, letztere in 6 m Wasserabstand (das Niveau der Windmessungen über dem Pazifik ist nicht angegeben, dürfte aber auch in der Nähe von 6 m liegen). Die vertikale Differenz Δe_1 des Wasserdampfdruckes ist auf das Niveau 4 m bezogen, die Differenz ΔT_1 der Temperatur auf 4 m bzw. (bei den Pazifikmessungen) auf 6,2 m. Der Wasserdampfdruck e kann ohne Bedenken statt der spezifischen Feuchte verwendet werden, weil der Einfluß des vertikalen Luftdruckgradienten auf ihn in der hier betrachteten Schicht vernachlässigt werden kann.

Aus diesem Material werden wir später 36 Serien ausscheiden, und zwar:

a) — nach dem Vorgange von Montgomery — alle Profile, bei denen die Differenz $\Delta e_1 = e_1 - E_w$ zwischen dem Wasserdampfdruck e_1 in 4 m Wasserabstand und dem Sättigungsdampfdruck E_w bei der Wassertemperatur T_w kleiner ist als 1 mbar. Bei so geringen vertikalen Differenzen kann der logarithmische Gradient $\partial e / \partial \ln z$ nicht mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden.

b) diejenigen Profile, bei denen eine vertikale Zunahme des Wasserdampfdrucks mit der Höhe beobachtet wurde, obgleich die Differenz Δe_1 negativ war; denn es dürfte sich dabei — abgesehen von Beobachtungsfehlern — um in stationäre Verhältnisse gehandelt haben.

Für die Messungen aus der Ostsee und dem Pazifik hat Montgomery bereits die Verdunstungskoeffizienten jedes Profils mit Hilfe der Gleichung

$$\Gamma_1 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - E_w} : \ln \frac{z_1}{z_2}, \tag{16}$$

die aus Gleichung (15) folgt, berechnet und in seinen Tabellen 1, 2 und 9 mitgeteilt [*1*]. Diese Werte übernehmen wir im folgenden.

Aus den Pazifikbeobachtungen ermittelte H. U. Sverdrup wegen der Streuung der Einzelwerte durch arithmetische Mittelbildung sieben mittlere Profile, aus denen er die Werte des Verdunstungskoeffizienten ableitete, ohne die instationären Fälle auszuscheiden. Wir bestimmen für jedes einzelne Profil den Verdunstungskoeffizienten neu, weil nur so eine ausreichende Aufgliederung des Materials möglich ist und man einen Einblick in die Streuung bekommt. Auch werden auf diese Weise die systematischen Fehler vermieden, die sich einschleichen, wenn man nichtlineare Höhenfunktionen mittelt. Die Messungen wurden in ein halblogarithmisches Koordinatensystem entsprechend der Abb. 3 eingetragen und die Verdunstungskoeffizienten mit Hilfe von graphisch be-

Tabelle 2. *Die Beobachtungen auf der „Indianapolis" (H. U. SVERDRUP [2]) im Pazifik zwischen Hawai und Kalifornien.*

Es bedeuten: Δe_1 die Differenz zwischen dem Wasserdampfdruck der Luft in 4 m Höhe und dem Sättigungsdampfdruck bei der Wassertemperatur, ΔT die Differenz zwischen der Lufttemperatur in 6,2 m Höhe und der Wassertemperatur, $\frac{\partial e}{\partial \ln z}$ den logarithmischen Vertikalgradienten des Wasserdampfdrucks, $\Gamma_1 = \frac{l}{\Delta e_1} \frac{\partial e}{\partial \ln z}$ den Verdunstungskoeffizienten und u die Windgeschwindigkeit. Die mit einem Kreuz † versehenen Profile wurden ausgeschieden.

Nr. nach [2]	Δe_1 [mb] *)	Γ_1	$\frac{\partial e}{\partial \ln z}$ [mb]	ΔT [°C]	u [m/sec]
1	— 3.3	0.11	— 0.34	+ 0.3	15.4
2	— 3.6	0.19	— 0.54	— 1.2	12.9
3	— 1.5	0.49	— 0.73	— 1.1	13.4
†) 4	— 5.8	— 0.01	+ 0.07	— 1.3	9.3
†) 5	— 3.9	— 0.06	+ 0.22	0.0	8.2
6	— 4.7	0.36	— 1.7	— 2.5	9.3
7	— 5.0	0.13	— 0.64	— 1.9	11.8
†) 8	— 5.7	— 0.01	+ 0.04	— 0.8	9.3
9	— 3.2	0.42	— 1.4	— 0.6	8.8
10	— 4.5	0.10	— 0.44	— 1.0	8.8
†)11	— 5.3	— 0.01	+ 0.07	— 0.6	9.3
12	— 3.1	0.36	— 1.1	— 1.6	11.3
13	— 4.9	0.21	— 1.02	— 0.7	11.8
14	— 3.7	0.35	— 1.27	— 0.2	11.3
15	— 5.8	0.04	— 0.23	— 0.1	14.9
16	— 6.4	0.19	— 1.2	+ 0.2	8.2
17	— 4.9	0.11	— 0.56	+ 0.2	16.5
19**)	— 8.0	0.09	— 0.71	— 1.5	10.8
20	— 7.6	0.10	— 0.78	— 1.0	10.8
21	— 9.9	0.14	— 1.4	— 1.9	9.8
22	— 8.6	0.10	— 0.84	— 2.1	11.3
23	— 7.5	0.07	— 0.49	— 2.2	10.8
24	— 4.0	0.30	— 1.2	+ 1.0	10.3
25	— 6.4	0.18	— 1.1	— 1.0	13.9
26	— 7.3	0.12	— 0.88	— 0.3	12.4
27	— 7.4	0.13	— 0.95	— 0.7	12.9
†)28	— 9.4	— 0.01	+ 0.07	— 0.6	9.3
29	— 2.2	0.12	— 0.27	+ 0.2	5.7
†)30	— 5.0	— 0.03	+ 0.18	— 0.5	4.1
†)31	— 6.8	— 0.04	+ 0.29	— 0.8	1.5
†)32	— 4.3	— 0.07	+ 0.33	— 1.6	5.1
†)33	— 3.1	— 0.09	+ 0.26	— 0.1	6.2
†)34	— 4.7	— 0.01	+ 0.05	— 0.8	4.1
35	— 5.8	0.03	— 1.1	— 0.8	8.8
36	— 5.3	0.06	— 0.31	— 1.6	11.8
†)37	— 2.6	— 0.04	+ 0.11	— 0.8	14.4
38	— 4.1	0.10	— 0.42	+ 0.7	12.9
†)39	— 0.6	0.8	— 0.5	+ 0.9	8.2
40	— 2.2	0.13	— 0.28	— 0.5	4.1
41	— 3.5	0.07	— 0.25	— 1.1	5.7
42	— 4.1	0.12	— 0.48	— 1.9	7.2
43	— 6.8	0.08	— 0.53	— 1.0	3.1
44	— 2.7	0.30	— 0.81	— 0.5	6.2
45	— 1.4	0.45	— 0.67	+ 2.5	1.5
46	— 4.2	0.05	— 0.23	+ 0.4	2.6

*) Der Wasserdampfdruck in 4 m Höhe wurde mit Hilfe der Höhenfunktion extrapoliert.
**) Die Meßreihe 18 kann wegen zu starker Streuung der gemessenen Wasserdampfwerte nicht ausgewertet werden.

stimmten Näherungsgeraden nach Gleichung (15) berechnet. Um eine Vergleichsmöglichkeit mit den übrigen Serien zu haben, wurde der Wasserdampfdruck für das Niveau 4 m mit Hilfe dieser Näherungsgeraden extrapoliert.

Diese Verdunstungskoeffizienten sind in der Tabelle 2 enthalten, gemeinsam mit den logarithmischen Gradienten, der Windgeschwindigkeit, der Wasserdampfdifferenz und der Temperaturdifferenz Luft minus Wasser. Die auszuscheidenden Serien sind mit einem Kreuz gekennzeichnet. Die von SVERDRUP mit der Nr. 18 versehene Serie konnte wegen zu großer Streuung der Meßwerte nicht benutzt werden. Die Serie Nr. 39 wurde bei der Mittelbildung ausgeschieden, weil der abnormal große Wert des Verdunstungskoeffizienten den Mittelwert zu stark beeinflussen würde.

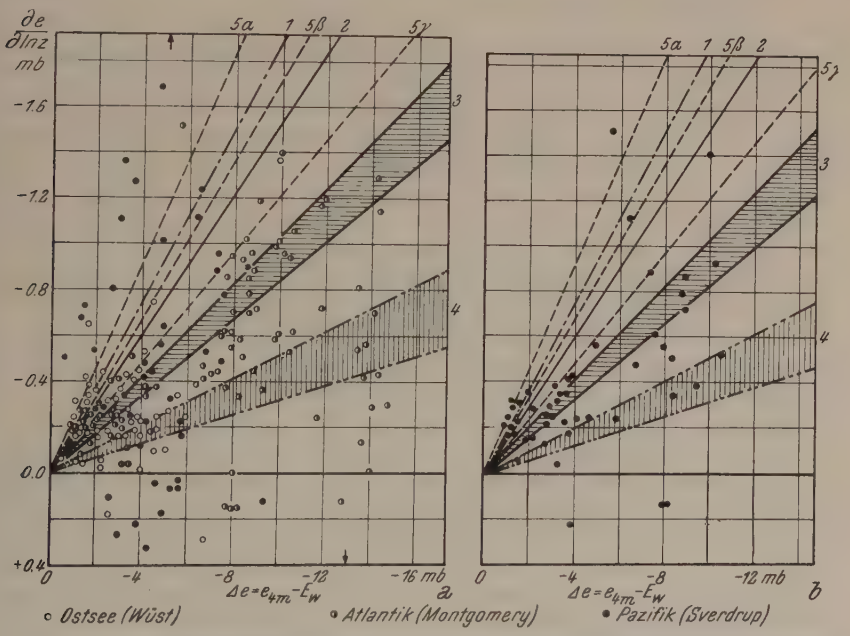


Abb. 4. a) Die Wasserdampfdifferenz Δe (bezogen auf das Niveau 4 m) als Funktion des logarithmischen Gradienten $\partial e / \partial \ln z$ nach 200 Wasserdampfprofilmessungen auf dem Meer. Die Geraden bzw. Keile deuten verschiedenartige Theorien über den Verdunstungskoeffizienten bzw. die Rauhigkeit der Meeresoberfläche an.

1. ——·——·—— hydrodynamisch rauhe Meeresoberfläche mit $z_0 = 2$ cm nach MODEL, [15] und Glg. (13),
2. ———————— hydrodynamisch rauhe Meeresoberfläche mit $z_0 = 0{,}6$ cm nach ROSSBY [16] und Glg. (13),
3. ▒▒▒▒▒▒▒▒ hydrodynamisch glatte Meeresoberfläche nach MONTGOMERY-SVERDRUP, [1] und [2],
4. //////////////// hydrodynamisch rauhe Meeresoberfläche mit atmosphärischer Zwischenschicht darüber nach MONTGOMERY [1],
5. — — — — — hydrodynamisch rauhe Meeresoberfläche, deren Rauhigkeit mit zunehmender Windgeschwindigkeit abnimmt, nach NEUMANN (α) 2 m/sec, (β) 6 m/sec, (γ) 25 m/sec Windgeschwindigkeit) [19].

Die Fälle 2 und 3 entsprechen dem Vorhandensein einer kritischen Windgeschwindigkeit nach ROSSBY-MUNK.

b) Dieselbe Darstellung wie Abb. 4a, beschränkt auf die Fälle, in denen die Luft in 5 bis 6 m Höhe über dem Meer höchstens 0.5° C kälter oder wärmer war als das Wasser. Unterschiedliche Signaturen für die drei Meßgebiete sind nur in der Abb. 4a verwendet.

In der Tabelle 3 sind die Mittelwerte der vertikalen Wasserdampf- und Temperaturdifferenzen, der Windgeschwindigkeit, des logarithmischen Gradienten und des Verdunstungskoeffizienten für die drei Meßgebiete enthalten. Im Durchschnitt herrschte vertikale Temperaturabnahme, die Pazifikmessungen wurden bei höheren Windgeschwindigkeiten gewonnen als die übrigen und stellen deshalb eine sehr willkommene Ergänzung des Materials dar.

Tabelle 3. *Mittelwerte der charakteristischen Parameter für die Meßreihen, die zur Bearbeitung des Verdunstungskoeffizienten benutzt wurden.*

Erklärungen siehe Tab. 2.

Bearbeiter	Anzahl der Meßreihen	$\overline{\Delta e_1}$	$\overline{\frac{\partial e}{\partial \ln z}}$	$\bar{u}$	$\overline{\Delta T}$	$\overline{\Gamma_1}$
G. WÜST [29]	35	—3.2 mb	—0.25 mb	5.4 m/sec	—0.59° C	0.08
R. B. MONTGOMERY [1]	96	—6.8 mb	—0.52 mb	4.6 m/sec	—0.78° C	0.08
H. U. SVERDRUP [2]	33	—5.0 mb	—0.68 mb	9.9 m/sec	—0.71° C	0.14
alle	164	—5.6 mb	—0.49 mb	5.8 m/sec	—0.72° C	0.09

In der Abb. 4a sind sämtliche Werte — einschließlich der instationären Fälle — zusammengefaßt. Als Ordinate ist der logarithmische Gradient $\partial e/\partial \ln z$, der dem vertikalen Gradienten in der Höhe 1 * zahlenmäßig gleich ist, als Abszisse die Wasserdampfdifferenz Δe_1 aufgetragen. In dieser Darstellung entspricht nach Gleichung (15) jedem Wert des Verdunstungskoeffizienten eine Gerade durch den Nullpunkt. Die drei Beobachtungsgebiete sind durch unterschiedliche Signaturen kenntlich gemacht.

Der erste Eindruck, den dieses Diagramm vermittelt, ist der einer verwirrenden Vielfalt. Wenn irgendein Wert des Verdunstungskoeffizienten bevorzugt vorkäme, so müßte sich das durch eine Häufung der Punkte um Geraden durch den Nullpunkt bemerkbar machen. Davon kann keine Rede sein. Die Werte streuen vielmehr anscheinend willkürlich über den ganzen Quadranten. Es ist deshalb auch nicht verwunderlich, daß zur Zeit so widerspruchsvolle Angaben über die Werte des Verdunstungskoeffizienten vorliegen. Die verschiedenen Ergebnisse anderer Autoren (s. o.) sind durch Gerade oder schraffierte Keilbereiche angedeutet. Für jede dieser Anschauungen lassen sich Beobachtungen finden, die mit ihr übereinstimmen. Keine aber vermag der Gesamtheit des Materials gerecht zu werden. Das ist z. B. auch für das vielfach verwendete Modell von einer kritischen Windgeschwindigkeit der Fall, nach dem sich die Werte um Gerade 2 und innerhalb des Keils 3 als zwei Punktwolken anordnen müßten.

Diese Diskrepanz zwischen Beobachtung und Theorie versuchten MONTGOMERY und SVERDRUP auf zwei verschiedenen Wegen zu er-

* Siehe Fußnote auf Seite 362.

klären. Montgomery führte sie auf die Verdunstung aus dem Gischt zurück, die im theoretischen Ansatz nicht berücksichtigt werden kann [*1*]. Sverdrup meinte, daß die Wasserdampfschichtung über dem Meer großen örtlichen Unterschieden unterliegt und daß man die Austauschtheorie nur auf den räumlichen Mittelwert der Schichtung anwenden dürfe, der durch ein einzelnes Profil nicht erfaßt würde [*2*, *3*].

Sicherlich spielen beide Fehlerquellen eine Rolle und vergrößern die Streuung der Beobachtungen und sicherlich treten noch andere prinzipieller und instrumenteller Natur hinzu, die wir oben erörterten, ganz abgesehen von den Beobachtungsfehlern. Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes ist aber eine ganz erhebliche Streuung der Verdunstungskoeffizienten als Folge des Einflusses der vertikalen Temperaturschichtung von vornherein zu erwarten. Die Abbildungen 1 und 2 machen diese Variabilität deutlich.

Diese Auffassung wird durch die Abb. 4b bestätigt. In ihr sind nur diejenigen Beobachtungen aufgenommen, bei denen die Temperaturdifferenz ΔT kleiner ist als $\pm$ 0,5° C. Hier ist die Streuung der Meßpunkte zwar auch noch erheblich, aber wesentlich geringer als in der Abb. 4a, und dies dürfte weniger auf die Verkleinerung des Materials als darauf zurückzuführen sein, daß die Unterschiede der thermischen Schichtung kleiner sind.

VI. Der Verdunstungskoeffizient als Funktion der Windgeschwindigkeit und der thermischen Schichtung, adiabatische Verdunstungskoeffizienten.

Es erscheint deshalb notwendig, das Material nach der Windgeschwindigkeit und der thermischen Schichtung aufzugliedern, um den Einfluß beider Parameter herauszuschälen. Hierfür wird eine Unterteilung vorgenommen in vier Gruppen der Windgeschwindigkeit (0 bis 3,9 m/sec, 4 bis 5,9, 6 bis 7,9 und 8 bis 16,5 m/sec) und fünf Gruppen der Temperaturdifferenz ΔT (— 2,7 bis — 1,6° C, — 1,5 bis — 0,6, — 0,5 bis 0,0, 0,0 bis + 0,5 und + 0,6 bis + 2,5°C). Es wurden ferner zwei Gruppen mit Windgeschwindigkeiten unter und über 6 m/sec mit den zugehörigen Untergruppen des ΔT gebildet, um die Frage einer eventuellen kritischen Windgeschwindigkeit zu untersuchen. In der Tabelle 4 sind die Mittelwerte der Windgeschwindigkeit u, der Temperaturdifferenz ΔT und des Verdunstungskoeffizienten Γ_1 mit seinem Fehler für diese verschiedenen Untergruppen zusammengestellt. Ferner ist die Anzahl n der benutzten Profile für jede Untergruppe angegeben.

Die Abb. 5 zeigt die so festgestellte Abhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten von der Temperaturschichtung für Windgeschwindigkeiten unter und über 6 m/sec, und zwar sind die Mittelwerte der beiden Untergruppen als Funktion der dazugehörigen mittleren Temperaturdifferenz ΔT aufgetragen. Bei geringen Windgeschwindigkeiten (der Mittelwert beträgt für die Gruppe unter 6 m/sec $\bar{u} = 4{,}0$ m/sec, für die Gruppe über 6 m/sec $\bar{u} = 8{,}9$ m/sec) nimmt der Verdunstungskoeffizient mit Abnahme der „Labilität" bzw. Zunahme der Stabilität

Tabelle 4. *Mittelwerte des Verdunstungskoeffizienten $\overline{\Gamma_1}$ (bezogen auf das Niveau 4 m) für Gruppen der Windgeschwindigkeit u und der Temperaturdifferenz ΔT. n bedeutet die Anzahl der Profile in den Gruppen und Obergruppen, $\overline{u}$ und $\overline{\Delta T}$ die Mittelwerte der Windgeschwindigkeit und der Temperaturdifferenz in dem betreffenden Bereich.*

Intervall der Windgeschwindigkeit	$\overline{\Delta T}$ °C	$\overline{u}$ m/sec	n	$\overline{\Gamma_1}$
0—5.9 m/sec	+1.0	4.5	14	0.162 ± 0.036
n = 103	+0.3	4.2	19	0.125 ± 0.015
$\overline{u}$ = 3.99 m/sec	—0.3	3.7	18	0.084 ± 0.011
$\overline{\Delta T}$ = —0.57° C	—0.9	3.8	33	0.081 ± 0.007
	—2.1	4.0	19	0.037 ± 0.004
6— 16.5 m/sec	+0.5	9.6	10	0.137 ± 0.023
n = 61	—0.3	8.6	10	0.125 ± 0.045
$\overline{u}$ = 8.88 m/sec	—0.9	8.8	24	0.155 ± 0.028
$\overline{\Delta T}$ = —0.60° C	—1.9	8.8	17	0.130 ± 0.023
0— 3.9 m/sec	—2.2	3.0	8	0.023 ± 0.005
n = 39	—0.8	2.6	17	0.075 ± 0.012
$\overline{u}$ = 2.68 m/sec	—0.3	2.8	8	0.070 ± 0.016
$\overline{\Delta T}$ = —0.74° C	+1.0	2.3	6	0.072 ± 0.012
4— 5.9 m/sec	—2.0	4.9	11	0.047 ± 0.004
n = 64	—1.1	4.9	17	0.084 ± 0.009
$\overline{u}$ = 4.82 m/sec	—0.4	4.4	10	0.096 ± 0.013
$\overline{\Delta T}$ = —0.47° C	+0.2	4.7	15	0.137 ± 0.018
	+0.8	5.3	11	0.154 ± 0.034
6— 7.9 m/sec	—1.7	6.9	8	0.103 ± 0.014
n = 31	—0.8	6.6	11	0.140 ± 0.039
$\overline{u}$ = 6.70	—0.3	6.7	7	0.106 ± 0.029
$\overline{\Delta T}$ = —0.74	+0.6	6.5	5	0.112 ± 0.022
8— 16.5 m/sec	—1.9	10.4	9	0.153 ± 0.041
n = 30	—1.0	11.4	13	0.167 ± 0.039
$\overline{u}$ = 11.12 m/sec	—0.2	12.9	3	0.170 ± 0.094
$\overline{\Delta T}$ = —0.94° C	+0.5	12.7	5	0.162 ± 0.038

kräftig zu. Diese Zunahme setzt sich ohne jeden Zweifel gegen die Streuung des Materials durch. Sie entspricht den im Abschnitt IV dargestellten Beobachtungsergebnissen bezüglich der Abhängigkeit der Höhenprofile austauschbarer Eigenschaften über dem Festland von der Temperaturschichtung, wie der Vergleich mit den Abb. 1 und 2 zeigt. Bei Windgeschwindigkeiten über 6 m/sec ist die Streuung der Mittelwerte erheblich größer. Wahrscheinlich hängt das neben den oben erwähnten prinzipiellen Unsicherheiten der hier angewendeten Methode, die mit der Erhöhung der Windgeschwindigkeit wachsen, auch mit der Vermehrung der Beobachtungsschwierigkeiten bei hohen Windstärken zusammen. Deshalb läßt sich eine Abhängigkeit von der Temperaturschichtung nicht eindeutig feststellen; sie ist aber offenbar sehr viel geringer als bei den kleineren Windgeschwindigkeiten.

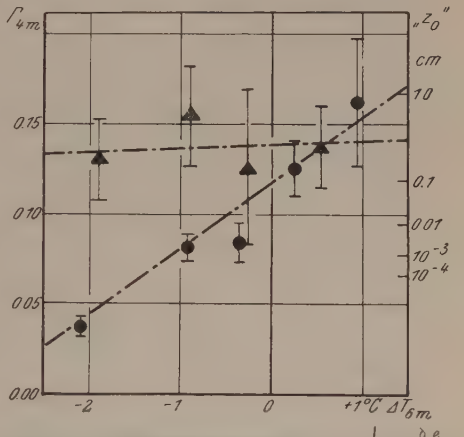


Abb. 5. Der Verdunstungskoeffizient $\Gamma_1 = \frac{1}{\Delta e_1} \frac{\partial e}{\partial \ln z}$ als Funktion der Temperaturdifferenz ΔT Luft minus Wasser.
⊛ Windgeschwindigkeit kleiner als 6 m/sec (Mittelwert 4,0 m/sec).
▲ Windgeschwindigkeit größer als 6 m/sec (Mittelwert 8,9 m/sec).
Die Senkrechten an jedem Mittelwert geben seinen mittleren Fehler an, die strichpunktierten Geraden sind Ausgleichgeraden. Rechts ist der scheinbare Rauhigkeitsparameter „z_0" (siehe, Legende Abb. 2) angegeben.

Das stimmt mit unseren Vorstellungen über das Zusammenwirken des thermischen und des dynamischen Anteils des Austausches überein. Denn der dynamische wächst mit der Geschwindigkeit der Horizontalbewegung und unterdrückt hierbei den thermischen Anteil um so mehr, je höher die Windgeschwindigkeit ist. Dadurch wird eine Annäherung an adiabatische Verhältnisse verursacht. Dieser Zusammenhang wird z. B. durch die Richardsonsche Zahl zum Ausdruck gebracht, und auch Lettau erfaßt ihn in seiner Theorie durch einen analogen Ansatz. Wir können deshalb eine qualitative Übereinstimmung unserer Abb. 5 mit der Abb. 20 in der Abhandlung von Lettau [*26*] feststellen, in der die Abhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten von u und ΔT dargestellt wird, die sich aus der Lettauschen Theorie (in ihrer ersten Fassung) ergibt. Ein quantitativer Vergleich wäre bei Kenntnis des wahren Rauhigkeitsparameters möglich.

Aus der Abb. 5 läßt sich auch der adiabatische Wert des Verdunstungskoeffizienten für beide Windgeschwindigkeitsgruppen entnehmen. Man erhält ihn durch Interpolation für den Wert von ΔT, der adiabatischer Schichtung entspricht. Da ΔT sich auf ein Niveau von 4 m (Ostsee- und Atlantikmessungen) bzw. 6,2 m (Pazifikmessungen) bezieht, ist das für etwa $\Delta T = -0{,}05^0$ C der Fall. Zur Durchführung der Interpolation

nähern wir die Punkte der Abb. 5 für beide Windgeschwindigkeitsgruppen durch eine lineare Abhängigkeit von ΔT an, die wir — mit einer Gewichtsverteilung entsprechend den mittleren Fehlern der Mittelwerte — mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate ermitteln. Die Näherungsgleichungen, die mittlere Abweichung m der Einzelprofile von ihnen und die (abgerundeten) adiabatischen Werte der Verdunstungskoeffizienten sind den ersten beiden Zeilen der Tabelle 5 zu entnehmen.

Tabelle 5. *Der Verdunstungskoeffizient Γ_λ als Funktion der Temperaturdifferenz ΔT für verschiedene Gruppen der Windgeschwindigkeit und die Gleichungen der Ausgleichsgeraden des Verdunstungskoeffizienten, daraus abgeleitete adiabatische Verdunstungskoeffizienten und Streuung m der Einzelprofile gegenüber den Ausgleichsgeraden. Rauhigkeitsparameter z_0, die sich nach Gleichung (13) aus den adiabatischen Verdunstungskoeffizienten ergeben werden. Sonstige Erläuterungen siehe Tabelle 4.*

Windgeschwindigkeitsintervall	Verdunstungskoeffizient $\Gamma_\lambda =$	Adiabatischer Verdunstungskoeffizient (abgerundet)	Rauhigkeitsparameter z_0 nach Glg. (13)
0 — 5.9 m/sec $n = 103$ $\bar{u} = 3.99$	$0.117 + 0.036\,\Delta T$ $m = \pm 0.064$	0.12 ± 0.01	0.08 cm
6 — 16.5 m/sec $n = 61$ $\bar{u} = 8.88$ m/sec	$0.139 + 0.002\,\Delta T$ $m = \pm 0.108$	0.14 ± 0.01	0.3 cm
0 — 3.9 m/sec $n = 39$ $\bar{u} = 2.68$	$0.074 + 0.015\,\Delta T$ $m = \pm 0.037$	0.07 ± 0.01	$6\,10^{-4}$ cm*
4 — 5.9 m/sec $n = 64$ $\bar{u} = 4.82$ m/sec	$0.119 + 0.030\,\Delta T$ $m = \pm 0.061$	0.12 ± 0.01	0.09 cm
6 — 7.9 m/sec $n = 31$ $\bar{u} = 6.70$	$0.126 + 0.011\,\Delta T$ $m = \pm 0.089$	0.13 ± 0.03	0.14 cm
8 — 16.5 m/sec $n = 30$ $\bar{u} = 11.12$ m/sec	$0.171 + 0.009\,\Delta T$ $m = \pm 0.123$	0.17 ± 0.04	1.2 cm

* Dieser Wert des Rauhigkeitsparameters steht im Widerspruch zu der Minimumbedingung

$$\frac{z_0}{ln\,\frac{z_1+z_0}{z_0}} \geqq \frac{\nu}{k^2 n} \qquad (17)$$

Diese ergibt sich für $z = 0$ aus den Gleichungen (4), (5) und (6) und der Tatsache, daß der Austauschkoeffizient nicht kleiner als die molekulare Zähigkeit $\nu = \ldots$ sein kann. Wir befinden uns, falls der obige Wert von z_0 nicht durch die geringe Zahl der Beobachtungen vorgetäuscht ist, in dem Übergangsbereich, in dem die Gleichung (13) nicht mehr angewendet werden kann, sondern ein Ansatz für hydrodynamisch glatte Flächen analog der Gleichung (1) gemacht werden muß.

Die so erhaltenen adiabatischen Verdunstungskoeffizienten nehmen mit der Windgeschwindigkeit zu. Die Realität ihres Unterschiedes läßt sich aber nicht nachweisen, wenn man strenge statistische Kriterien anwendet. Die Differenz beträgt 0,024 und ist zwar größer als ihr mittlerer Fehler ± 0,016, aber geringer als sein dreifacher Betrag, der überschritten werden müßte, wenn die Differenz mit der konventionellen Überschreitungwahrscheinlichkeit (0,27%) gesichert sein soll. Abgesehen davon, ob die

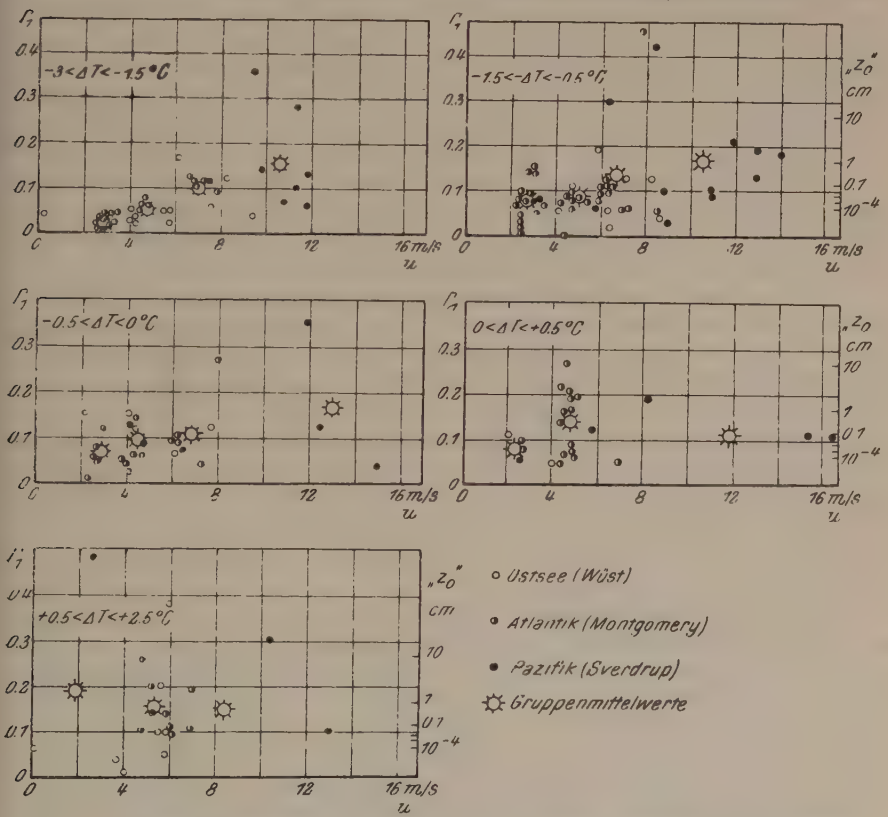


Abb. 6. Der Verdunstungskoeffizient Γ_1 als Funktion der Windgeschwindigkeit u für fünf Intervalle der Temperaturdifferenz ΔT Luft minus Wasser, abgeleitet aus Wasserdampfprofilmessungen über dem Meer. Kleine Kreise bedeuten Einzelprofile, große Gruppenmittelwerte. Siehe auch Legende zu Abb. 2.

Anwendung so strenger Kriterien in diesem Zusammenhang zweckmäßig ist, werden wir dieser Frage weiter unten durch Ableitung der adiabatischen Verdunstungskoeffizienten aus den anderen Untergruppen weiter nachgehen. Zu einem Entscheid darüber, ob die Zunahme im Sinne der Rossbyschen Vorstellung sprunghaft bei einer kritischen Windgeschwindigkeit erfolgt, reicht diese Aufteilung des Materials in zwei Gruppen ebenfalls nicht aus. Über hydrodynamisch glatten Flächen beträgt aber nach Montgomery und Sverdrup [*1* und *2*] der Verdunstungs-

koeffizient bei einer Windgeschwindigkeit von 4,2 m/sec 0,08 bis 0,09, und das ist ein wesentlich kleinerer Wert als der, den wir erhalten.

Die Abb. 5 macht deutlich, wie leicht eine Diskontinuität in der Windabhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten vorgetäuscht werden kann, wenn man den Einfluß der vertikalen Temperaturschichtung außer acht läßt. Sie zeigt sehr anschaulich, daß der Unterschied zwischen den Verdunstungskoeffizienten für kleine und für große Windgeschwindigkeiten um so größer wird, je „labiler" die thermische Schichtung ist. Dadurch kann der Eindruck eines Sprunges entstehen, der mit dem hydrodynamischen Verhalten der Meeresoberfläche garnichts zu tun hat, sondern durch die unterschiedliche Wirkung der Dichteschichtung bedingt ist. Auf diese Weise kommt H. U. SVERDRUP bei seiner Zusammenstellung von Verdunstungskoeffizienten, die bei „Labilität" beobachtet wurden, zu einer Bestätigung der ROSSBYschen Ansicht (s. Abb. 3 in [*2*]). Dieses Ergebnis, von dem sich SVERDRUP in einer späteren Veröffentlichung [*3*] distanziert, wurde von H. M. MUNK als einer seiner Beweise für das Vorhandensein einer kritischen Windgeschwindigkeit verwendet [*17*].

In der Abb. 6 sind die Verdunstungskoeffizienten bei verschiedenen Temperaturschichtungen als Funktion der Windgeschwindigkeit dargestellt. Jeder Punkt entspricht einem Profil, deshalb ist die Streuung der Werte größer als in der Abb. 5. Je „labiler" die Schichtung ist, um so klarer setzt sich trotz dieser Streuung eine Zunahme mit der Windgeschwindigkeit durch. Bei Stabilität ist die Anzahl der Beobachtungen zu klein, ihr Streubereich zu groß, als daß eine eindeutige Abhängigkeit festgestellt werden könnte. Vielleicht ist eine Abnahme mit zunehmender Windgeschwindigkeit angedeutet. Eine solche wäre wegen des oben erwähnten Zusammenwirkens der dynamischen und der thermischen Komponente des Austausches zu erwarten.

Eine kritische Windgeschwindigkeit läßt sich auch in diesen Diagrammen nicht feststellen. Die Beobachtungen deuten vielmehr auf eine stetige Zunahme mit der Windgeschwindigkeit bei „Labilität" hin. Diese ist von einer Streuung überlagert, die mit zunehmender Windgeschwindigkeit und mit abnehmender „Labilität" wächst. Ob die Zunahme des Verdunstungskoeffizienten auch mit einer Änderung des hydrodynamischen Zustandes der Meeresoberfläche zusammenhängt, läßt sich nur mit adiabatischen Werten des Verdunstungskoeffizienten entscheiden, die wir im folgenden ableiten.

Hierfür ist in der Abb. 7 der Verdunstungskoeffizient für vier Gruppen der Windgeschwindigkeit als Funktion von ΔT aufgetragen, die einzelnen Profile sind durch kleine, die Gruppenmittelwerte durch große Kreise gekennzeichnet. Mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate wurden wieder — ausgehend von den Einzelprofilen — Näherungsgeraden berechnet, die in der Tabelle 5 enthalten sind ebenso wie die aus ihnen abgeleiteten (abgerundeten) adiabatischen Verdunstungskoeffizienten. Zur Veranschaulichung der Streuung wurden auch die inversen Regressionsgeraden — ΔT als Funktion T_1 — berechnet und in die Diagramme dünn gestrichelt eingetragen.

Die Abb. 7 bestätigt die Abhängigkeit des Verdunstungskoeffizienten von der thermischen Schichtung, die sich aus der Abb. 5 ergab. Sie zeigt aber auch die Streuung der Einzelwerte, und wieder fällt die Zunahme dieser Streuung mit der Windgeschwindigkeit in die Augen. Bei der Gruppe von 8,0 bis 16,5 m/sec ist sie so groß, daß man sich fragen muß, ob es überhaupt sinnvoll ist, diese Mittelwerte zu benutzen. Vielleicht

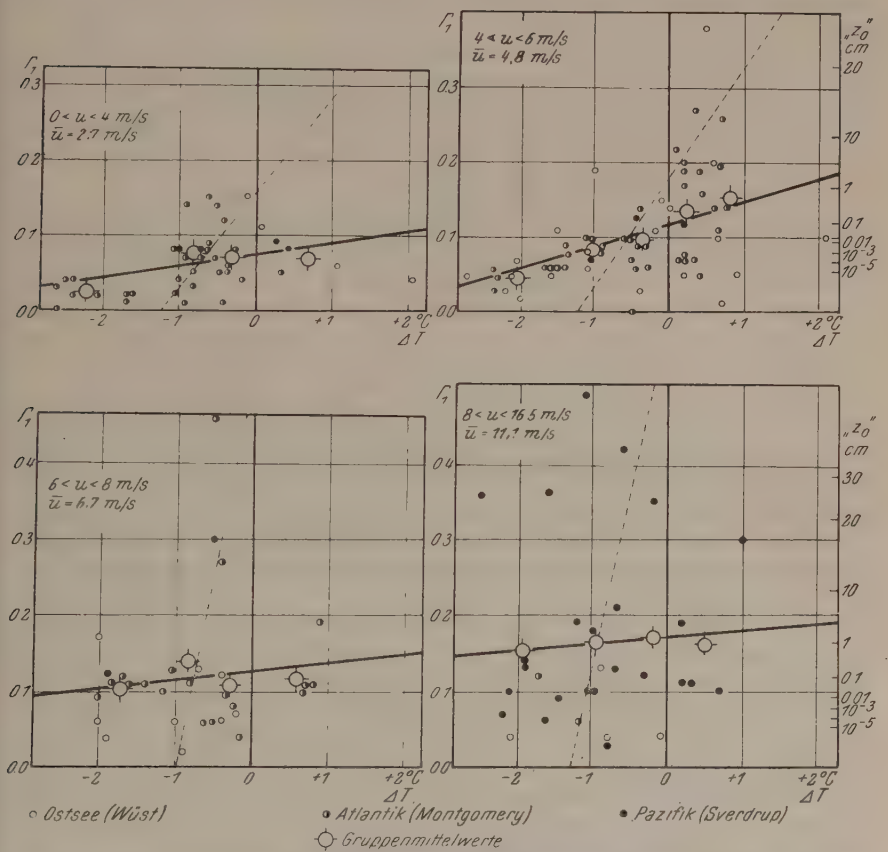


Abb. 7. Der Verdunstungskoeffizient Γ_1 als Funktion der Temperaturdifferenz ΔT Luft minus Wasser für vier Intervalle der Windgeschwindigkeit u, siehe Abb. 6. Die ausgezogenen Geraden sind Ausgleichsgeraden, die den Verdunstungskoeffizienten als lineare Funktion von ΔT darstellen, die gestrichelten Geraden sind die inversen Regressionsgeraden (ΔT als Funktion von Γ_1). Siehe auch Legende der Abb. 2.

ist diese Unterschiedlichkeit der Einzelprofile aber ein charakteristisches Merkmal der atmosphärischen Schichtung unmittelbar über dem Meer bei starkem Wind, und vielleicht kommt man durch Mittelbildung dem momentanen räumlichen Mittelwert nahe, der für die vertikalen Austauschströme maßgeblich ist.

Meistens kommt diese Streuung in den Bearbeitungen von Austauschproblemen gar nicht zum Ausdruck, weil von vornherein mittlere Profile

berechnet und als Ausgangsmaterial benutzt werden (z. B. Roll in [18], Rossby in [16]). Der Vorteil unseres Verfahrens liegt darin, daß wir auch die Streuung quantitativ erfassen, die wir für eine Beurteilung der Zuverlässigkeit der adiabatischen Verdunstungskoeffizienten nicht entbehren möchten. Deshalb gehen wir erst nach der Auswertung der Einzelprofile zur Mittelbildung über, und die Gruppenmittelwerte der Abb. 5 und 7 zeigen, daß sich auch auf diesem Wege ein recht einheitliches Bild ergibt. Leider sind — abgesehen von der zweiten Gruppe in der Abb. 7 — nur wenige Beobachtungen bei stabiler Schichtung vorhanden, und die Interpolation der adiabatischen Verdunstungskoeffizienten geht deshalb bei drei Gruppen in den Randbereichen der Punktwolken vor sich. Darunter leidet die Zuverlässigkeit dieser Werte, wie auch aus der Lage der inversen Regressionsgeraden hervorgeht.

Die adiabatischen Verdunstungskoeffizienten sind in der Abb. 8a als Funktion der Windgeschwindigkeit aufgetragen, ihre mittleren Fehler und diejenigen der zugehörigen Werte der mittleren Windgeschwindigkeit sind durch schraffierte Rechtecke kenntlich gemacht. Die aus den beiden Obergruppen der Windgeschwindigkeit abgeleiteten Werte sind in das Diagramm mitaufgenommen, und jetzt zeigt sich, daß die bereits festgestellte Zunahme mit der Windgeschwindigkeit auch bei einer weiteren Aufteilung des Materials erhalten bleibt. Unsere Vermutung, daß man das Material durch schematische Anwendung statistischer Zuverlässigkeitskriterien nicht ausschöpft, wird dadurch bestätigt. Zwar genügen nur die Unterschiede zwischen dem kleinsten adiabatischen Verdunstungskoeffizienten und den übrigen dem 3σ-Kriterium, trotzdem muß sich in der systematischen Zunahme der Werte von Gruppe zu Gruppe eine reale Gesetzmäßigkeit ausdrücken. Bei Größen, die nicht negativ werden, kann eine Vergrößerung der Streuung allerdings auch eine Erhöhung der Mittelwerte hervorrufen, und wieweit ein solcher Effekt unsere Gruppenmittelwerte und damit die adiabatischen Verdunstungskoeffizienten beeinflußt, läßt sich schwer abschätzen. Da aber die Mindestwerte der Einzelprofile, wie die Abb. 7 zeigt, ebenfalls von Gruppe zu Gruppe wachsen, dürfte die allgemeine Tendenz einer Zunahme mit der Windgeschwindigkeit reell sein. Das ist deshalb wesentlich, weil von anderer Seite eine Abnahme der Rauhigkeit der Meeresoberfläche mit zunehmender Windstärke abgeleitet wurde [19], die sich auch auf den adiabatischen Verdunstungskoeffizienten auswirken müßte.

In der niedrigsten Windgeschwindigkeitsgruppe (mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 2{,}7$ m/sec) liegt der Wert des adiabatischen Verdunstungskoeffizienten in der Nähe desjenigen für hydrodynamisch glatte Flächen. Im Bereich der sogenannten kritischen Windgeschwindigkeit zwischen 4 und 7 m/sec liegen drei Werte. Diese lassen eine Diskontinuität nicht erkennen, sondern fügen sich einer allgemeinen stetigen Zunahme ein. Der Wert bei 2,7 m/sec ist geringer, als einer Extrapolation der anderen Werte entsprechen würde. Ob sich hier eine Diskontinuität andeutet, die nach niedrigeren Windgeschwindigkeiten verschoben wäre, ließe sich nur durch eine Vermehrung des Materials entscheiden.

Am größten ist der Fehler des Verdunstungskoeffizienten bei einer mittleren Windgeschwindigkeit von 11,1 m/sec, sein Absolutwert darf deshalb nicht überbewertet werden. Wir sind aber zu der Aussage berechtigt, daß das Material der Wasserdampfschichtung über dem Meer bei sorgfältiger Ausschaltung des Einflusses der vertikalen Temperaturschichtung eine Zunahme des adiabatischen Verdunstungskoeffizienten sehr wahrscheinlich macht, die stetig von Werten über einer hydrodynamisch

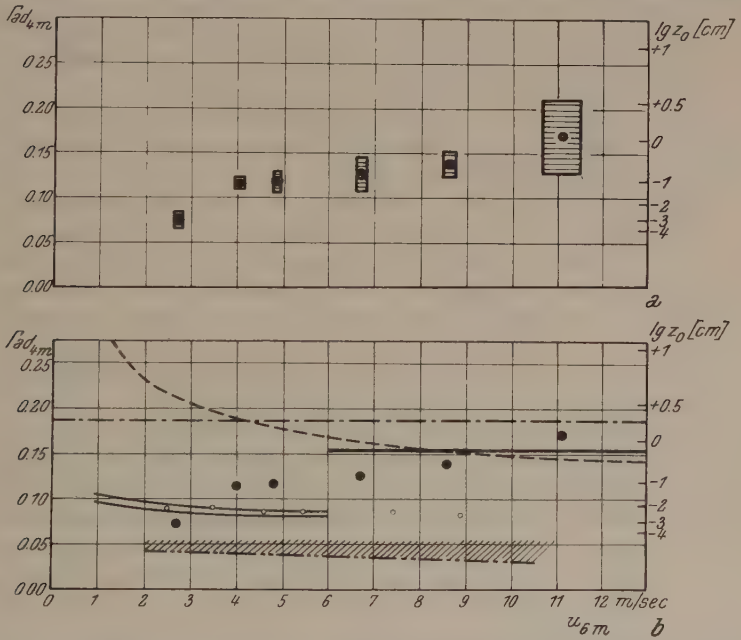


Abb. 8a. Der adiabatische Verdunstungskoeffizient Γ_{ad_1} (bezogen auf das Niveau 4 m) als Funktion der Windgeschwindigkeit u in 6 m Höhe. Die Rechtecke geben den Bereich der mittleren Fehler an. Rechts ist der dekadische Logarithmus des Rauhigkeitsparameters angegeben, der sich mit Hilfe von Gleichung (13) aus dem Verdunstungskoeffizienten Γ_{ad_1} ergibt.

Abb. 8b. Der adiabatische Verdunstungskoeffizient Γ_{ad_1} aus Wasserdampfprofilmessungen über dem Meer als Funktion der Windgeschwindigkeit u, verglichen mit einigen Resultaten anderer Theorien und Messungen über die Rauhigkeit der Meeresoberfläche.

—·—·—·— 1. Windprofil- und Windstaubearbeitung nach MODEL [*15*], angewendet auf Glg. (13),

— — — — — 2. Windstaubearbeitung nach NEUMANN [*19*], angewendet auf Glg. (13),

O 3. Windprofilmessungen über dem Wattenmeer von ROLL [*18*], angewendet auf Glg. (13),

//////////////// 4. Zwischenschichttheorie über rauher Meeresoberfläche nach MONTGOMERY [*1*],

═══════ 5. glatte Meeresoberfläche nach MONTGOMERY-SVERDRUP [*1*] und [*2*],

——————— 6. rauhe Meeresoberfläche nach ROSSBY [*16*], angewendet auf Glg. (13).

Die Kurven 5 und 6 entsprechen der Annahme einer kritischen Windgeschwindigkeit nach ROSSBY-MUNK.

glatten Fläche bei niedrigen Windgeschwindigkeiten zu solchen über einer hydrodynamisch rauhen Fläche vor sich geht, deren Rauhigkeitsparameter mit der Windgeschwindigkeit wächst.

In der Tabelle 5 sind in der letzten Spalte die Rauhigkeitsparameter angegeben, die aus den adiabatischen Verdunstungskoeffizienten folgen,

wenn die Gleichung (13) gültig ist. Ihre dekadischen Logarithmen sind an der rechten Ordinate der Abb. 8b miteingetragen. In diesem Diagramm stellen wir unser Ergebnis mit denjenigen anderer Autoren zusammen, die in der Legende der Abbildung aufgeführt sind.

Die Werte des adiabatischen Verdunstungskoeffizienten, die sich aus der Zwischenschichttheorie von MONTGOMERY [*1*] ergeben, und die ausgeprägte Abnahme des Rauhigkeitsparameters mit der Windgeschwindigkeit, die aus NEUMANNS Windstaubearbeitung [*19*] folgt und sich mit Gleichung (13) auf den Verdunstungskoeffizienten übertragen läßt, fallen völlig aus unserem Material heraus. NEUMANNS Werte für große Windgeschwindigkeiten liegen aber innerhalb der Streuung unserer Verdunstungskoeffizienten für 6,7 und 11,1 m/sec. Bei kleinen Windgeschwindigkeiten ist im Rahmen der Streuung eine Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert für hydrodynamisch glatte Grenzflächen nach MONTGOMERY [*1*] und SVERDRUP [*2*] festzustellen und eine entsprechende Übereinstimmung mit den Windprofilmessungen von ROLL [*18*]. Der von MODEL [*15*] abgeleitete Wert eines konstanten Rauhigkeitsparameters für alle Windgeschwindigkeiten ist offenbar zu hoch. Die Ansicht ROSSBYS [*16*] und MUNKS [*17*], daß mit wachsender Windgeschwindigkeit ein Übergang von einer hydrodynamisch glatten zu einer rauhen Grenzfläche vor sich geht, wird qualitativ bestätigt. Ein diskontinuierlicher Übergang wird jedoch nicht beobachtet. Es ist anzunehmen, daß er bisher durch die Vernachlässigung des Einflusses der Temperaturschichtung vorgetäuscht wurde. Auch die Annahme konstanter Rauhigkeit steht im Bereich der von uns erfaßten Windgeschwindigkeiten mit unseren Ergebnissen im Widerspruch, wenn auch die wachsende Streuung diese Aussage um so unsicherer macht, je höher das betreffende Windgeschwindigkeitsintervall liegt. Größenordnungsmäßig stimmen aber die von NEUMANN und ROSSBY angenommenen Rauhigkeitsparameter bei etwa 10 m/sec mit den unsrigen überein.

Es ist bemerkenswert, daß die wesentlichsten Diskrepanzen bei kleinen Windgeschwindigkeiten vorkommen. Wir möchten das als Hinweis darauf ansehen, daß der Einfluß der vertikalen Temperaturschichtung die Hauptursache der Unstimmigkeiten darstellt, denn der thermische Anteil des Austausches wirkt sich am stärksten bei niedrigen Windstärken aus. Vielleicht nehmen unsere Ergebnisse deshalb eine vermittelnde Stellung zwischen den bisher vorliegenden ein, weil allein bei ihnen die Temperaturschichtung systematisch ausgeschaltet wurde.

Die Zunahme des Verdunstungskoeffizienten mit der Windgeschwindigkeit, die wir feststellen, stimmt mit neueren Untersuchungen der Windreibung an Wasserflächen überein, die J. R. D. FRANCIS [*30*] kürzlich veröffentlichte. Vielleicht kommt hierin eine neuerliche Annäherung der bisher so unterschiedlichen Ansichten über dieses schwierige Problem der Wechselwirkung zwischen dem Ozean und der Atmosphäre zum Ausdruck.

Zum Abschluß sind in der Tab. 6 die Mittelwerte des Verdunstungskoeffizienten mitgeteilt, die sich aus dem hier bearbeiteten Material für Windgeschwindigkeiten zwischen 2 und 10 m/sec und für Temperatur-

differenzen ΔT von — 3°C bis + 1°C. ergeben. Sie wurden mit Hilfe der Näherungsgleichungen der Tabelle 5 abgeleitet, ihr mittlerer Fehler ist im Durchschnitt ± 20%. Bis zu 12 m/sec sind außerdem die Rauhigkeitsparameter mitangegeben, die sich mit Hilfe der Gleichung (13) aus den adiabatischen Verdunstungskoeffizientenberechnen lassen.

Tabelle 6. *Mittelwerte des Verdunstungskoeffizienten und des Rauhigkeitsparameters z_0 (nach Gleichung (13)), die sich durch Interpolation aus der Tab. 5 ergeben. Bezugsniveau für den Verdunstungskoeffizienten 4 m, für die Windgeschwindigkeit und die Temperaturdifferenz ΔT 5 bis 6 m. Eingeklammerte Werte liegen am Rande des Interpolationsbereiches.*

Windgeschwindigkeit in 6 m Höhe m/sec	Verdunstungskoeffizient für die Temperaturdifferenz ΔT Luft minus Wasser °C					Rauhigkeitparameter z_0 (nach Gleichung 13)
	— 3	— 2	— 1	0	+ 1	
2	(0.02)	0.03	0.05	0.06	(0.07)	(10^{-4} cm)
4	(0.03)	0.05	0.08	0.11	(0.14)	0.05
6	(0.07)	0.08	0.10	0.13	(0.14)	0.2
8	(0.11)	0.12	0.13	0.14	(0.14)	0.3
10	(0,12)	0.15	0.15	0.15	(0.16)	0.5
12	—	—	—	—	—	(1)

Diese Tabelle stellt die bestmögliche Interpolation des Materials dar, nicht mehr. Solange aber keine umfangreicheren Beobachtungsreihen vorliegen, kann sie als Grundlage für eine rohe Abschätzung der vertikalen Wasserdampfschichtung über dem Meer dienen mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\partial e}{\partial z} = \Gamma_1 \frac{\Delta e_1}{z}, \tag{17}$$

wenn die Windgeschwindigkeit und die Temperaturdifferenz ΔT in etwa 6 m Wasserabstand, die Wasserdampfdifferenz Δe_1 in etwa 4 m Wasserabstand gemessen vorliegen.

VII. Schlußbemerkung.

Im Vorhergehenden wird die Verbindung zwischen dem empirisch abgeleiteten adiabatischen Verdunstungskoeffizienten und dem hydrodynamischen Charakter der Meeresoberfläche bevorzugt mit Hilfe der Gleichung (13) hergestellt, d. h. mit dem Prandtlschen Modell der adiabatischen Turbulenz über rauhen Flächen bzw. mit Hilfe von Folgerungen aus der Gleichung (1) für eine hydrodynamisch glatte Fläche. Es sind auch Ansätze möglich, die von anderen Vorstellungen vom Übergang des Wasserdampfes in die Atmosphäre ausgehen (siehe z. B. die Zusammenstellung in [3]). Hierauf wurde, wenn überhaupt, nur kurz eingegangen, und auch die vielen grundsätzlichen Fragen (Gleichheit der Austauschkoeffizienten verschiedener Eigenschaften, Trift der Grenzfläche, Abweichung der Verhältnisse in der atmosphärischen Grenzschicht von einfachen Modellvorstellungen, Nullpunkt der Höhenkoordinate u. a.)

konnten nur gestreift werden. Diese Beschränkung ist nur durch die Notwendigkeit der Konzentration auf eine Fragestellung (Einfluß der thermischen Schichtung und seine Ausschaltung) bedingt, sie soll keine Unterschätzung der Problematik oder eine Überschätzung des verwendeten Modells bedeuten.

Unser Hauptanliegen war die Herausstellung der Tatsache, daß es zwecklos ist, Erörterungen über atmosphärische Austauschprobleme oder über den hydrodynamischen Charakter der Meeresoberfläche anzustellen, wenn man nicht den alles überdeckenden Einfluß der Dichteschichtung in der atmosphärischen Grenzschicht berücksichtigt. Es lag uns ferner daran, zu zeigen, daß auch für maritime Probleme die Eliminierung des thermischen Einflusses mit Hilfe des vorliegenden spärlichen Beobachtungsmaterials versucht werden kann, wenn auch die Eindeutigkeit der Ergebnisse z. Zt. noch unter der geringen Anzahl der vorhandenen Meßreihen leidet.

Um so notwendiger erscheint es uns deshalb, daß die Beobachtungen innerhalb der maritimen atmosphärischen Grenzschicht vermehrt werden, um dadurch weitergehende Untersuchungen in der hier gewiesenen Richtung zu ermöglichen.

Literatur.

1. R. B. MONTGOMERY: Observations of vertical humidity distribution above the ocean surface and their relation to evaporation. Pap. in Phys. Oc. and Meteor., Mass. Inst. Technol. and Woods Hole Ocean. Inst. **VII**, 4 (1940).
2. H. U. SVERDRUP: The humidity gradient over the sea surface. Journ. of Meteorol. **III**, 1—8 (1946).
3. H. U. SVERDRUP: Evaporation from the Oceans. Compendium of Meteorology, Boston, 1951, 1071—1081.
4. W. PAESCHKE: Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitätsproblem in der bodennahen Luftschicht. Diss. Göttingen, 1937; Beitr. Phys. fr. Atm. **24**, 163 (1938).
5. H. U. SVERDRUP: The eddy conductivity of the air over a smooth snow field. Geofys. Publ. **XI**, no. 7 (1936).
6. L. PRANDTL: Führer durch die Strömungslehre, 2. Aufl., 1944.
7. TH. V. KÁRMÁN: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, Math. Nat. Kl., 1930, 58—76.
8. R. B. MONTGOMERY: Generalization for cylinders of PRANDTLs linear assumption for mixing length. Ann. New York Ac. of. Sc., **XLIV**, 1, 89—103 (1943).
9. L. PRANDTL: Meteorologische Anwendungen der Strömungslehre. Beitr. z. Phys. d. fr. Atm. **19**, 188—202 (1932).
10. C. G. ROSSBY and R. B. MONTGOMERY: The layer of frictional influence in wind and ocean currents. Pap. in Phys. Oc. and Met., Mass. Inst. of Techn. and Woods Hole Oc. Inst. **III**, 3 (1935).
11. P. A. SHEPPARD: The aerodynamical drag of the earth surface and the value of von KÁRMÁNs constant in the lower atmosphere. Proc. Roy. Soc., London A, **188**, 208—222 (1947).
12. F. PASQUILL: The aerodynamic drag of grassland. Proc. Roy. Soc., London, **202**, 143—153 (1950).
13. W. C. JACOBS: The energy exchange between sea and atmosphere and some

of its consequences. Bull. of Scripps Inst. of Oc. of the Univ. of Calif., **VI**, 2, 27—122 (1951).

14. R. O. REID: The equatorial currents of the eastern Pacific as maintained by the stress of the wind. Journ. of Mar. Res. **VII**, 74—99 (1948).

15. F. MODEL: Die Rauhigkeit der Meeresoberfläche. Gerl. Beitr. Geoph. **59**, 102—142 (1943).

16. C. G. ROSSBY: On the momentum transfer at the sea surface. I. Pap. in Phys. Oc. and Meteor., Mass. Inst. of Techn. and Woods Holes Oc. Inst. **IV**, no. 3, 3—20 (1936).

17. W. H. MUNK: A critical wind speed for air-sea boundary processes. Journ. of Mar. Res. **VI**, 203—218 (1947).

18. H. U. ROLL: Wassernahes Windprofil und Wellen auf dem Wattenmeer. Ann. d. Meteorol. **1**, 139—151 (1948).

19. G. NEUMANN: Über den Tangentialdruck des Windes und die Rauhigkeit der Meeresoberfläche. Z. f. Meteorol. **2**, 193—203 (1948).

20. R. B. MONTGOMERY: The present position of the study of exchange across the ocean-atmosphere interface. Geophys. Res. Pap. **19**, 131—140 (1952).

21. H. U. ROLL: Zur Frage der Umrechnung Beaufort—Knoten auf See. Ann. d. Meteorol. **4**, 408—410 (1951).

22. G. NEUMANN: Gibt es eine kritische Windgeschwindigkeit auf See? Deutsch. Hydr. Zeitschr. **IV**, 6—13 (1951).

23. K. BROCKS: Temperatur und Austausch in der untersten Atmosphäre. Ber. d. Deutsch. Wetterd. US-Zone, **12**, 166—170 (1950).

24. E. L. DEACON: Vertical diffusion in the lowest layers of the atmosphere. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **79**, 89—103 (1949).

25. F. PASQUILL: Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground. Proc. Roy. Soc. London **198**, 116—140 (1949).

26. H. LETTAU: Isotropic and nonisotropic turbulence in the atmosphere surface layer. Geoph. Res. Pap. **1** (1949).

27. H. LETTAU: The present position of selected turbulence problems in the atmospheric boundary layer. Geophys. Res. Pap. **19**, 49—95 (1952).

28. K. BROCKS: Über den täglichen und jährlichen Gang der Höhenabhängigkeit der Temperatur in den unteren 300 Metern der Atmosphäre und ihren Zusammenhang mit der Konvektion. Ber. d. Deutsch. Wetterd. US-Zone, **5** (1948).

29. G. WÜST: Temperatur- und Dampfdruckgefälle in den untersten Metern über der Meeresoberfläche. Meteorol. Z. **54**, 4—9 (1937).

30. J. R. D. FRANCIS: Wind stress on a water surface. Quart. J. Roy. Met. Soc. **80**, 438—443 (1954).

551.554 (282)

Der mitführende Einfluß einer Flußoberfläche auf die darüberliegenden Luftschichten.

Von

E. R. Reiter, Innsbruck.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. An einer Innbrücke wurden mittels Rauchfäden Messungen des von der Flußoberfläche erzeugten Windprofiles angestellt. Es konnte gezeigt werden, daß die Profile dem logarithmischen Ansatz von PRANDTL genügen. Bei annähernder Windstille in höheren Luftschichten verhielt sich die Wasseroberfläche an der Meßstelle wie eine *rauhe* Grenzfläche mit dem konstanten Rauhigkeitsparameter $z_0 = 1.09$ cm. Der Einfluß des strömenden Wassers machte sich dabei bis in ca. 3 m Höhe bemerkbar. Bei stärkeren Talaufwinden (größeren Relativgeschwindigkeiten zwischen Luft und Wasser) nimmt der Rauhigkeitsparameter sprunghaft sehr kleine Werte an ($4.3 \cdot 10^{-6}$ cm), und es scheinen sich Strömungsverhältnisse wie über *glatten* Grenzflächen einzustellen.

Summary. From a bridge on the Inn River measurements of wind profiles produced by the streaming water have been made with the aid of smoke traces. It could be shown that these profiles follow PRANDTL's logarithmic law. With approximately zero wind speed in the upper levels of the profiles the water surface behaved like a rough boundary surface having a constant roughness parameter of $z_0 = 1.09$ cm. The influence of the running water could be traced up to a height of about 3 m. With a stronger valley breeze (higher relative velocities between air and water surface) the roughness parameter is decreasing abruptly to very small values ($4.3 \cdot 10^{-6}$ cm), and conditions as over a *smooth* surface seem to be established.

Résumé. L'auteur a mesuré le profil de vent produit par la rivière depuis un pont sur l'Inn à l'aide de fumées. Ces profils satisfont à la loi logarithmique de PRANDTL. Par temps calme en altitude, la surface de l'eau se comporte comme une surface rugueuse avec un paramètre de rugosité constant et égal à 1.09 cm; l'influence de l'eau courante se fait sentir jusqu'à trois mètres de hauteur environ. Par brise d'aval assez forte, le paramètre devient subitement beaucoup plus petit ($4.3 \cdot 10^{-6}$ cm), et il semble s'établir des conditions d'écoulement de l'air correspondant à des surfaces de glissement lisses.

Die Messungen.

Die Messungen wurden an einem pfeilerlosen Hängesteg bei Stams im Oberinntal durchgeführt, der mit einer Bodenfreiheit von 5 m das wassernahe Windprofil nicht störend beeinflußte. Ein gleichmäßiger Über-

strömungsweg von 300 m bei Talab- und 100 m bei Talaufwind ließ nach H. U. Roll [7] den Schluß zu, daß die beobachteten Profile an der Meßstelle bereits an die Rauhigkeitsverhältnisse der Unterlage angeglichen waren.

Um sowohl den Berg- und Talwind-Effekt als auch störende Querkomponenten in der Luftbewegung infolge der Verschiedenheit der Ufer (ein bewaldeter, steiler Bergrücken auf der linken und ebener Talboden auf der rechten Seite) von vornherein auszuschalten, wurden die Messungen kurz nach Sonnenaufgang und bei stärkerer Himmelsbedeckung durchgeführt.

Schalenkreuzanemometer, wie sie Roll [7, 8, 9, 11] und Bruch [1] bei ähnlichen Untersuchungen verwendeten, schieden wegen der zu großen Trägheit aus, ebenso Hitzdrahtanemometer, die nach Paeschke [4] einen

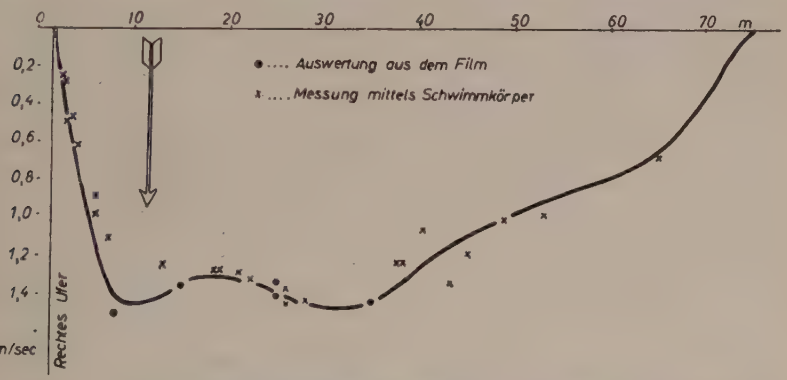


Abb. 1. Verteilung der Oberflächengeschwindigkeit des Inn bei Stams (31. März 1952).

Feuchtigkeitseffekt besitzen und daher zusätzliche Feuchtemessungen notwendig machen würden. Die Luftbewegung wurde vielmehr durch kleine „Rauchbomben" (2 T. Stärke, 5 T. $NaClO_3$, 11 T. NH_4Cl), deren thermischer Effekt sich als vernachlässigbar erwies, kenntlich gemacht und mit einer 16 mm Kinokamera verfilmt. Eine Eichung der Kamera ergab eine Bildfolge von 9.51 Bildern pro Sekunde.

Um den Einfluß der Perspektive ausschalten zu können, wurde an der jeweiligen Abwurfstelle eine geodätische Meßlatte gefilmt, an der dann direkt der Maßstab abgelesen werden konnte. Allein bei der Serie 04 in 8 m Entfernung war eine Berücksichtigung der Verzerrung nötig: Um den Durchstoßpunkt der (horizontierten) optischen Achse durch die Bildfläche wurden konzentrische Kreise gezogen und für jeden Kreisring aus dem dazugehörigen Meßlattenabschnitt die mittlere Einheitslänge bestimmt.

Gleichzeitige Wasser- und Lufttemperaturmessungen — letztere mit einem Assmannschen Aspirationspsychrometer — ließen zeitweise eine leicht stabile Schichtung erkennen (Tab. 1 und 2). Diese kann jedoch auf Grund der Ergebnisse Rolls [10, 11] vernachlässigt werden, da in diesem

Höhenbereich die PRANDTL'schen Ansätze für den Mischungsweg ganz unabhängig von der thermischen Schichtung gelten.

Die Wassergeschwindigkeit wurde mittels kleiner Schwimmkörper bestimmt. Bei den Messungen am 31. März 1952 konnte die Oberflächengeschwindigkeit auch aus dem Film ermittelt werden, da die schwimmenden Rauchkörper eine deutliche Spur auf der Wasseroberfläche zurückließen (Abb. 4a—d). Beide Methoden ergaben gute Übereinstimmung (Abb. 1). Am 16. Mai 1952 führte der Inn viel Schlamm, so daß infolge des verminderten Lichtkontrastes eine Auswertung der Strömungsgeschwindigkeit aus dem Film unzuverlässig war. Es wurden daher bei diesen Meßserien nur Schwimmkörper verwendet. Um feststellen zu können, ob eventuell schwimmende Rauchbomben auf die Geschwindigkeitsauswertung störend einwirken würden, wurde bei den Serien 11 und 12 jede dritte Bombe mit einem Eisenkörper beschwert, so daß sie sofort sank. Die Auswertung ergab jedoch keinerlei Unterschiede gegenüber den unbeschwerten Bomben.

Die Tab. 1 und 2 geben einen Überblick über die gemessenen und beobachteten Größen.

Tabelle 1. *Messungen am 31. März 1952.*

Zeit	7:10h	7:45h	8:25h	8:45h	10:03h
Wassertemperatur	5.6°		5.7°		
Lufttemperatur 10 cm	5.2°	5.4°	5.7°	6.7°	8.4°
50 cm	4.9°	5.2°	6.2°	6.8°	8.8°
150 cm	4.8°	5.2°	6.4°	6.8°	8.8°

Zeit	8:00h	8:10h	8:25h	8:30h	9:15h
Serie	01	02	03	04	05
Koordinate (Abb. 1)	25 m	25 m	15 m	8 m	35 m

Amplitude der Wasserwellen: 1—2 cm.

Tabelle 2. *Messungen am 16. Mai 1952.*

Zeit	5:20h	5:57h	7:00h
Wassertemperatur	8.3°	8.3°	
Lufttemperatur 10 cm	8.4°	8.5°	8.8°
50 cm	8.4°	8.5°	8.9°
150 cm	8.4°	8.6°	8.9°

Serie 11, Koordinate 20 m.

Zeit	5:55h	6:00h	6:02h	6:10h	6:12h	6:18h	6:23h
Bomben-Nr.	1—3	4—6	7—9	10—12	13—15	16—18	19—21

Serie 12, Koordinate 20 m.

Zeit	6:31h	7:18h	7:22h	7:25h
Bomben-Nr.	1—3	4—6	7—9	10—12

Amplitude der Wasserwellen: 1—2 cm.

Die Geschwindigkeitsauswertung.

Aus Fixpunkten im Gelände wurde für jede Meßserie ein starres Koordinatensystem gewonnen, das von Bild zu Bild zur Deckung gebracht wurde. Die zugehörige Meßlattenaufnahme lieferte den Maßstab, mit dessen Hilfe die Versetzung der Mittellinie des Rauchfadens direkt in cm/sec bestimmt werden konnte. Kleinsträumige Turbulenzvorgänge, die zur allmählichen Verbreiterung des Rauchfadens führen, wurden dabei außer acht gelassen. Die Geschwindigkeit wurde in den Niveaus 10, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200, 250, 300 und 350 cm bestimmt. Eine Auswertung unterhalb 10 cm erwies sich als unzuverlässig, da der Schnitt der Rauchfäden mit der Wasserfläche schon kurze Zeit nach Abwurf der Bombe schleifend wurde.

Es wurden insgesamt 63 Rauchbomben gefilmt und ausgewertet. Bei 1596 Bildern wurde die Geschwindigkeit in 11 verschiedenen Höhen gemessen. 4 bis 5 Sekunden nach Abwurf der Bombe begannen sich die Rauchfäden aufzulösen und eine Zeichnung der Mittellinie war nicht mehr eindeutig möglich. Inzwischen war jedoch bereits die nächste Bombe geworfen worden. Bei den Serien 01 bis 05 wurde auf diese Weise mit je 6 Bomben ein Zeitraum von ca. 30 sec lückenlos mit Messungen belegt. Bei den Serien 11 und 12 wurden Gruppen zu je 3 Bomben gemittelt und dadurch Mittelwerte für ca. 15 sec gewonnen. (Die Serien 06 bis 10 mußten wegen ungünstiger Windverhältnisse von der Auswertung ausgeschlossen werden.) Die so erhaltenen Mittelwerte sind in Abb. 6, den Gesetzen der Turbulenztheorie folgend, im halblogarithmischen Koordinatensystem aufgetragen. Trotz den nach den Erfahrungen der Turbulenzforschung sehr kurz erscheinenden Zeitspannen, über welche sich die Mittelbildung erstreckt, weisen die Kurven eine ziemlich gleichmäßig nach rechts zunehmende Neigung auf, was einer ansteigenden Schubspannungsgeschwindigkeit entspricht. Eine Ausnahme bilden lediglich die Kurven 02, 01 und 11 (7—9). Mittelt man nun diese Profile nach Schwellenwerten der Geschwindigkeit im 70 cm-Niveau (Abb. 7), so verschwinden auch noch die Unstetigkeiten in den untersten Schichten in weitem Maße und die Streuung der Punkte um die mittleren Geraden ist bereits als sehr gering anzusehen. Man kann daher behaupten, daß das Beobachtungmaterial trotz seines, durch den hohen Preis photographischen Materials bedingten, relativ geringen Umfanges als repräsentativ für die Erfassung mittlerer Verhältnisse gelten kann.

Meßergebnisse.

Die impulserzeugende Grenzfläche ist im vorliegenden Fall die Wasseroberfläche, während die Luftschichten in etlichen Metern Höhe höchstens in ganz schwacher Bewegung begriffen sind. Der Einfluß größerer Turbulenzkörper, wie sie bei stärkeren Winden aus der Höhe gegen den Boden hin vorstoßen und umgekehrt, und die den großen Austauschkoeffizienten und die starken Unregelmäßigkeiten in den momentanen Windprofilen verursachen, wird hier zurücktreten. Die

Windprofile, die bei nur schwacher, allgemeiner Luftbewegung in den untersten, wasserbeeinflußten Schichten entstehen, zeichnen sich durch größere Regelmäßigkeit über kürzere Zeiträume aus, als dies bei unbewegtem Untergrund und stärkeren, darüberstreichenden Winden der Fall ist. Dies zeigt sich deutlich an Hand von Isoplethendarstellungen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Rauchfäden. (Die horizontalen

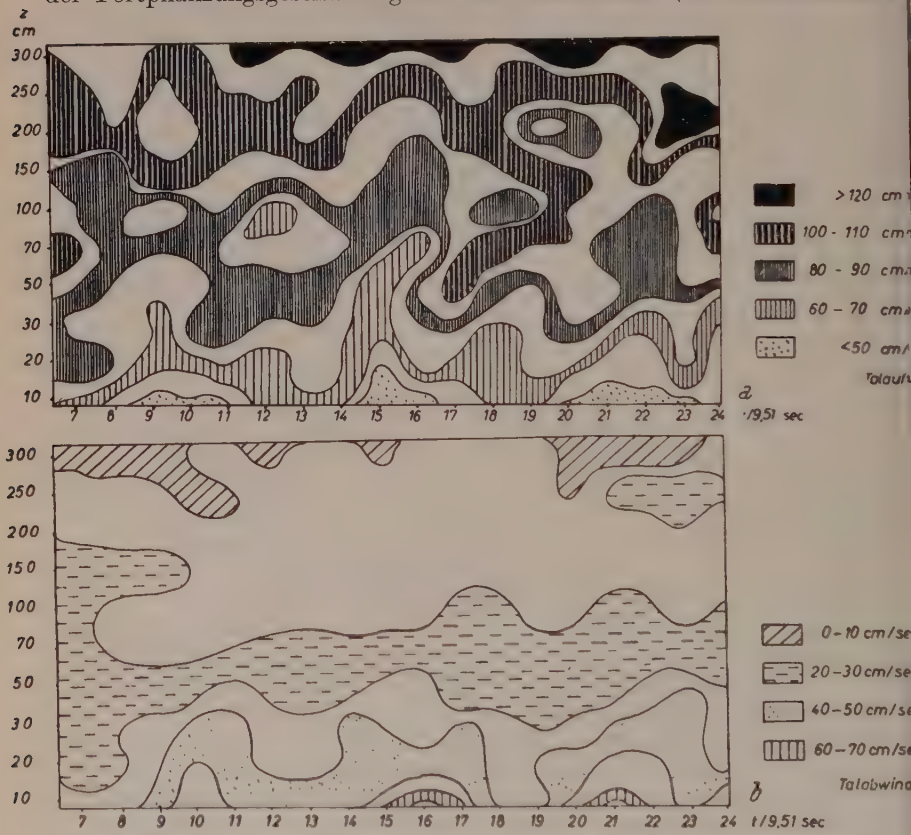


Abb. 2. Isoplethen der Luftgeschwindigkeit: a) bei Talaufwind (Serie 01, 1. Rauchfaden), b) bei angenäherter Windstille im Brückenniveau (Serie 03, 1. Rauchfaden).

Geschwindigkeitsänderungen stellen hierbei dv/dt eines Luftteilchens dar, zum Unterschied von den SCHMIDTschen Messungen [*12*, *13*], welche die lokalen Änderungen $\partial v/\partial t$ ergaben.) Abb. 2a bringt einen Fall stärkeren Talaufwindes, der sich bis unterhalb 10 cm Höhe, also bis nahe an die Wasseroberfläche durchsetzt. Abb. 2b dagegen stellt einen Fall angenäherter Windstille im Brückenniveau (5 m) dar. (Bei beiden Abb. ist die Höhe in einem verzerrten Maßstab aufgetragen.) Es zeigt sich, daß die einzelnen Geschwindigkeitsbänder bei der von der Wasseroberfläche allein erzeugten Bewegung viel weniger verzahnt sind; die

Turbulenzkörper sind weniger stark ausgeprägt als bei der aus höheren Luftschichten übertragenen und am Boden abgebremsten Bewegung.

Die Wirksamkeit kleinerer Turbulenzkörper, der „Luftquanten" (nach A. Büdel [2, 3]), welche sich als sehr kurzlebig erweisen, zeigt sich an Hand der Abb. 3a—d. Der zeitliche Abstand der in der Abb. wiedergegebenen Mittellinien beträgt 8/9.51 sec, also ungefähr 1 sec.

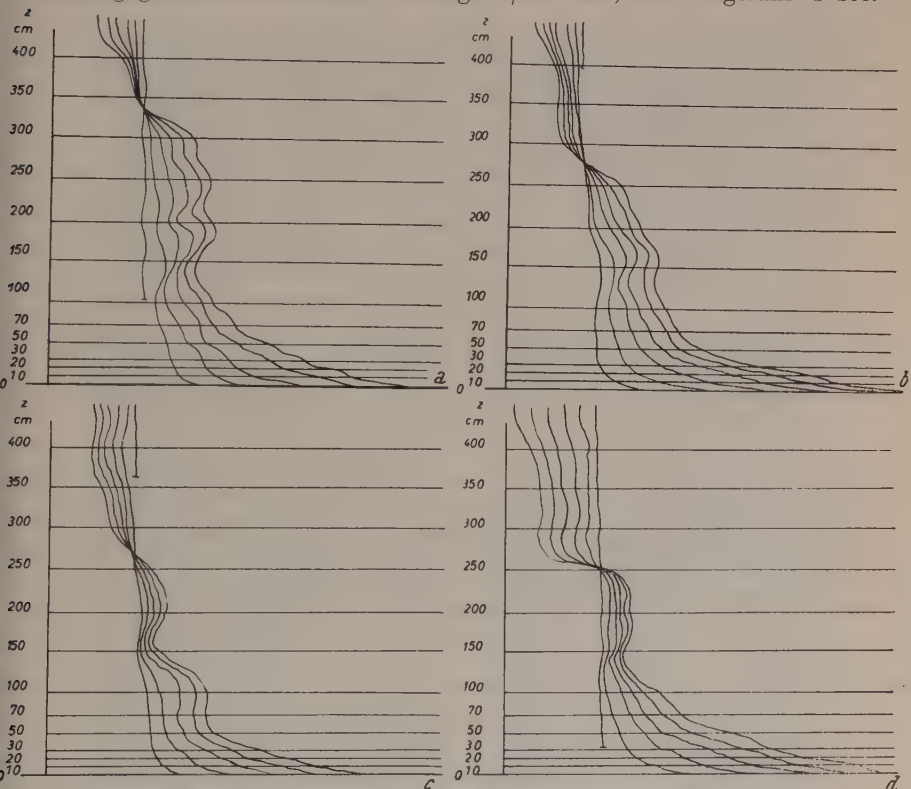


Abb. 3a—d. Serie 03, Rauchfäden 1 bis 4, bei angenäherter Windstille in Brückenhöhe. Der zeitliche Abstand der Linien beträgt 1.19 sec.

Trotz des geringen Zeitintervalls von 4 bis 5 Sekunden zwischen den einzelnen Bombenabwürfen zeigen sich zufolge der Wirkung verschiedener Luftquanten deutliche Verschiedenheiten. So zeigt z. B. die Abb. 3a in 180 bzw. 240 cm Höhe das Angreifen je eines Turbulenzkörpers. Die Wirksamkeit beträgt je ca. 5 sec und die Vorstoßrichtung scheint deutlich von unten nach oben zu weisen: also handelt es sich um Luftquanten, die ihre kinetische Energie von der Wasseroberfläche bezogen und nun gegen höhere Schichten hin vorstoßen. Der Rauchfaden, der durch diese Quanten eine Deformation erleidet, behält diese Gestalt nach der völligen Vermischung des Turbulenzkörpers mit seiner Umgebung bei. Abb. 3b folgt ca. 5 sec (46/9.51 sec) auf die vorhergehende, was einem räumlichen

Abstand der beiden Rauchfäden in 2 m Höhe von ca. 85 cm entspricht. Trotz dieser dichten Aufeinanderfolge ist beim zweiten Rauchfaden von der Wirkung des Turbulenzkörpers in 180 cm Höhe nicht mehr viel zu sehen und nach weiteren 55/9.51 sec (Abb. 3c) macht sich in diesem Niveau bereits ein bewegungshemmendes Luftquant bemerkbar. Ähnliche, kurzlebige Turbulenzkörper zeigen sich in einer Höhe von ca. 3 m.

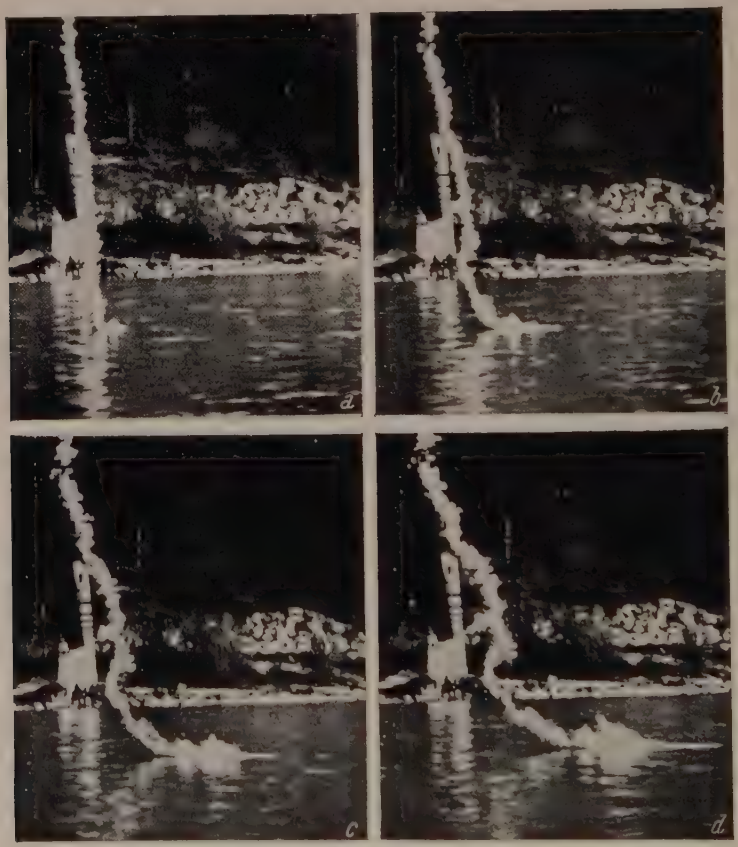


Abb. 4a—d. Serie 03, 1. Rauchfaden. Zeitlicher Bildabstand 1,19 sec. (Entspricht Abb. 3a.)

Korrespondierend zur schematischen Abb. 3a sind die Abb. 4a—d, welche der Bildfolge des Filmes entnommen sind und einen zeitlichen Abstand von 8/9.51 sec aufweisen.

Die schematische Abb. 5 stellt einen Fall mit Talaufwind dar, der an der Wasseroberfläche abgebremst wird, und entspricht der Isoplethendarstellung in Abb. 2a. Der zeitliche Abstand zwischen den Linien beträgt 2/9.51 sec. Bemerkenswert ist das Quant, das kurz nach Abwurf der Bombe in 160 cm Höhe auftritt und zu einem Zerreißen des Rauchfadens führt.

Das verarbeitete Beobachtungsmaterial läßt den Schluß zu, daß es sich bei der kleinräumigen Turbulenz nicht um eine „Verwirbelung", sondern um ausgeprägte Stöße verschieden gerichteter, räumlich und zeitlich eng begrenzter Luftquanten handelt, wobei das von der Wasseroberfläche erzeugte Windprofil infolge der größeren Homogenität der impulserzeugenden Grundströmung und daher der geringeren Variationsbreite der Turbulenzkörper wesentlich „ruhiger" ist als das aus einer abgebremsten Höhenströmung resultierende Momentanprofil.

Das vorliegende Material konnte mit Hilfe der PRANDTLschen Turbulenztheorie [*5*, *6*] *quantitativ* bearbeitet werden. Die Annahme eines zum Abstand von der festen Grenzfläche proportionalen Mischungsweges

$$l = \varkappa\,(z + z_0) \qquad (1)$$

erscheint auch im Falle einer bewegten Unterlage gerechtfertigt. $\varkappa$ ist die KÁRMÁNsche Konstante ($\cong 0.4$) und z_0 der Rauhigkeitsparameter, d. i. die Länge, um welche das Koordinatensystem nach unten verschoben werden muß, damit an der Grenzfläche der geforderte, endliche Mischungsweg vorhanden ist.

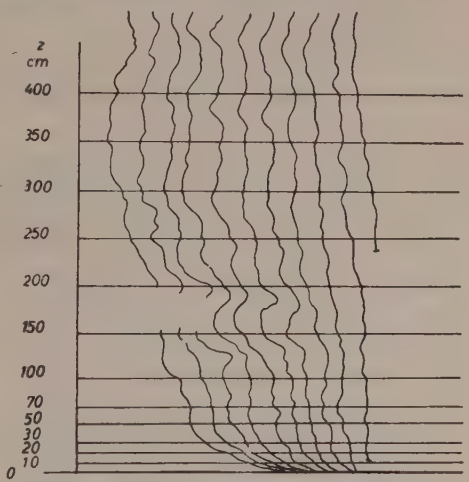


Abb. 5. Serie 01, 1. Rauchfaden, bei Talaufwind. Der zeitliche Abstand der Linien beträgt 2/9.51 sec.

Geändert müssen lediglich die Randbedingungen der Differentialgleichung

$$u_* = \varkappa\,(z + z_0)\,\frac{du}{dz} \qquad (2)$$

werden. u_* ist die Schubspannungsgeschwindigkeit, für welche auch die Beziehung

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\varrho}} \qquad (3)$$

gilt. τ_s ist die „scheinbare Schubspannung" bzw. der Impulstransport pro Zeiteinheit durch eine horizontale Flächeneinheit. Für die Höhe $z = z_0$ besitzt die Luft unter der Annahme von Haftreibung dieselbe Geschwindigkeit wie die Wasseroberfläche. Demnach ist die Luftgeschwindigkeit in der Höhe z gegeben durch

$$u_z = u_0 + 5.75\,u_*\,\log\frac{z + z_0}{z_0}, \qquad (4)$$

was einer logarithmischen *Ab*nahme der Windgeschwindigkeit mit der Höhe entspricht, da der von der Höhe z abhängige 2. Term auf der rechten Seite von Gleichung (4) wegen $du/dz < 0$ negativ ist.

Existiert eine der Wasserströmung parallele bzw. antiparallele Luftbewegung, so werden sich beide Einflüsse überschneiden. Unter der Vor-

aussetzung, daß die Wasseroberfläche bei einer überlagerten, allgemeinen Luftbewegung ihre Rauhigkeit *nicht* ändert, können beide Bewegungen, das vom bewegten Wasser erzeugte Windprofil einerseits und die an der ruhenden Wasseroberfläche derselben Rauhigkeit abgebremste Luftbewegung andererseits, gesondert betrachtet werden.

Die Überströmungswege bis zur Brücke betrugen 100 m bei Talauf-, 300 m bei Talabwind. Es kann daher, den Ergebnissen ROLLS [7] folgend, angenommen werden, daß der beim Übertritt vom Festland aufs Wasser infolge der geänderten Rauhigkeit der Unterlage entstehende Knick im Profil der überlagerten Luftbewegung bis zur Meßstelle schon in genügende Höhe gewandert ist, so daß er das tatsächlich gemessene Windprofil in den unteren Schichten nicht mehr beeinflußt. An der Meßstelle kann daher

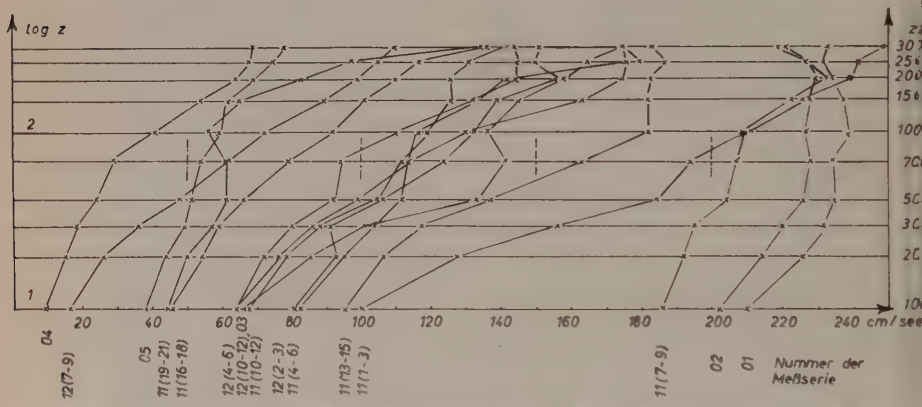


Abb. 6. Mittelwerte der Relativgeschwindigkeit zwischen Luft und Wasser für die einzelnen Meßserien in Abhängigkeit vom Logarithmus der Höhe z.

die beobachtete Schubspannungsgeschwindigkeit als Summe der Teilschubspannungen der sich überlagernden Einflüsse aufgefaßt werden (solange sich der Rauhigkeitsparameter der Wasseroberfläche nicht wesentlich geändert hat). Es gilt daher

$$\tau_s = \varrho\, u_{s*}^2 = \varrho\, (u_{l*} + u_{w*})^2. \tag{5}$$

τ_s ist der gesamte Impulsstrom zwischen Luft und Wasser, ϱ die Dichte der Luft, u_{s*} die beobachtete Gesamtschubspannung, die aus u_{l*}, der Schubspannung der Luftbewegung über ruhendem Wasser, und u_{w*}, der Schubspannung über bewegtem Wasser derselben Rauhigkeit, resultiert. Der Mischungsweg ist für beide Einflüsse infolge der konstant angenommenen Rauhigkeit derselbe. Die Differentialgleichung (2) erhält daher die veränderte Form

$$u_{s*} = l \left(\frac{d\, u_l}{d\, z} + \frac{d\, u_w}{d\, z} \right) \tag{6}$$

wobei u_l und u_w die mittleren Windgeschwindigkeiten der vom Wasser gebremsten bzw. erzeugten Profile bedeuten. Die Randbedingungen dieser Differentialgleichung lauten $u_l = 0$ für $z = 0$ und $u_w = u_0$ für

$z = 0$ bei Haftreibung. u_o ist die Geschwindigkeit der Wasseroberfläche. Durch Integration erhält man

$$(u_l + u_w) - u_o = \Delta u_z = 5.75\, u_{s*} \log \frac{z + z_o}{z_o}. \qquad (7)$$

Δu_z ist die beobachtete Relativgeschwindigkeit zwischen Wasseroberfläche und Luft in der Höhe z. Die einschränkende Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist die Konstanz des Rauhigkeitsparameters der Wasseroberfläche trotz überlagerter allgemeiner Luftbewegung.

Tabelle 3. *Relativgeschwindigkeit Luft — Wasser in verschiedenen Höhen.*

Serie Nr.	Wassergeschwindigkeit	Relativgeschwindigkeit Luft-Wasser in der Höhe h (cm)									
	(cm/sec)										
		10	20	30	50	70	100	150	200	250	300
04	150	9	15	18	24	29	41	54	64	68	69
05	143	38	44	49	51	54	59	62	69	75	78
a	146.5	23.5	29.5	33.5	37.5	41.5	50	58	66.5	71.5	73.5
12 (7—9)	175	16	26	36	48	62	72	89	99	105	110
11 (19—21)	175	44	50	57	61	61	56	65	83	97	135
11 (16—18)	175	45	54	59	66	79	92	101	110	117	136
12 (4—6)	175	64	72	80	92	94	110	132	144	145	144
b	175.0	41.4	49.2	56.2	63.6	70.0	77.8	89.8	101.0	107.8	120.6
12 (10—12)	175	66	86	101	133	141	136	145	156	150	151
11 (10—12)	175	64	76	86	99	114	130	163	175	176	175
03	137	67	78	88	105	112	119	126	126	131	142
12 (1—3)	175	81	93	91	106	124	132	139	158	165	175
11 (4—6)	175	82	95	104	112	113	117	133	142	180	175
c	167.4	72.0	85.6	94.0	111.0	120.8	126.8	141.2	151.4	160.4	163.6
11 (13—15)	175	95	106	117	137	163	182	182	183	187	183
11 (1—3)	175	100	127	156	185	194	211	226	238	240	247
d	175.0	97.5	116.5	136.5	161.0	178.5	196.5	204.0	210.5	213.5	215.0
11 (7—9)	175	186	192	195	204	207	209	223	233	227	219
02	132	202	214	220	226	228	227	228	230	227	221
01	140	210	226	232	235	235	239	238	234	232	233
e	149.0	199.3	210.7	215.7	221.7	223.3	225.0	229.7	232.3	228.7	224.3

Abb. 7 gibt die durch Mittelung nach Schwellenwerten der Relativgeschwindigkeit zwischen Luft und Wasser im 70 cm-Niveau (aus Abb. 6) gewonnenen Windprofile im halblogarithmischen Koordinatensystem wieder (Vgl. auch Tab. 3 und 4). (Für die Gerade *a* wurden wegen ihrer

großen Ähnlichkeit ausnahmsweise die Profile 04 und 05 gemittelt, um auf diese Weise auch die erste Geschwindigkeitsstufe mit 2 Werten belegen zu können.) Es zeigt sich, daß der Rauhigkeitsparameter für die Geraden a, b, c und d nur eine geringe Streuung um den mittleren Wert von $z_0 = 1.09$ cm aufweist. Die Abweichungen von diesem Mittelwert scheinen zufälliger Natur zu sein, d. h. die Annahme eines konstanten

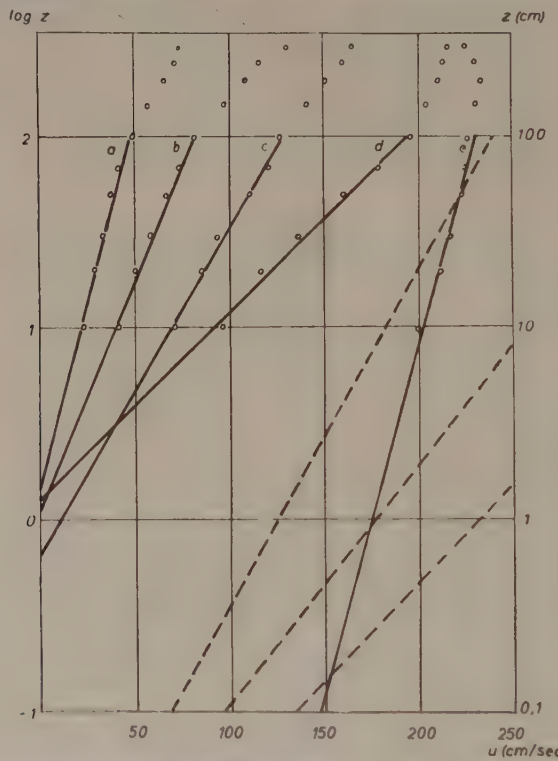


Abb. 7. Nach Schwellenwerten der Relativgeschwindigkeit in 70 cm Höhe gemittelte Windprofile. Strichliert: Windprofile über dem Wattenmeer nach H. U. ROLL.

Rauhigkeitsparameters erweist sich für den Fall nur *geringer* überlagerter Luftbewegung als gerechtfertigt. Die Schubspannungsgeschwindigkeit stellt somit eine lineare Funktion der Relativgeschwindigkeit in einer bestimmten Höhe[1] dar ($z = 100$ cm in Abb. 8). Die charakteristischen Größen der Geraden *a* bis *e* können aus Tabelle 4 entnommen werden.

[1] Läßt man den Meßpunkt *d* in Abb. 8 außer acht, so ergibt sich aus *a*, *b* und *c* die Abhängigkeit $z_0 = \nu/0.021\ u_*$, wobei ν die „kinematische Zähigkeit" bedeutet. KÁRMÁN fordert für „*glatte*" Grenzflächen die Abgängigkeit $z_0 = \nu/9.06\ u_*$ und ROLL $z_0 = \nu/2.1\ u_*$. Daraus geht hervor, daß selbst die Veränderung der Rauhigkeit zwischen *a*, *b* und *c* nicht mehr den Bedingungen über „*glatten*" *Flächen* genügt, daß vielmehr die Wasseroberfläche unter den gegebenen Versuchsbedingungen eine „*rauhe*" Grenzfläche darstellt, deren Rauhigkeit durch die natürliche Turbulenz des strömenden Wassers gegeben zu sein scheint.

Die Gerade c entspricht bei einer mittleren Wassergeschwindigkeit von 167 cm/sec angenäherter Windstille in Brückenhöhe. In diesem Falle erscheint das halblogarithmische Windprofil auch oberhalb 100 cm Höhe nur wenig gestört. Bei den übrigen Geraden wirkt offenbar die Brücke in ca. 5 m Höhe bremsend auf die allgemein überlagerte Luftbewegung. Die Geraden wurden daher nur bis 1 m Höhe gezeichnet. In dieser

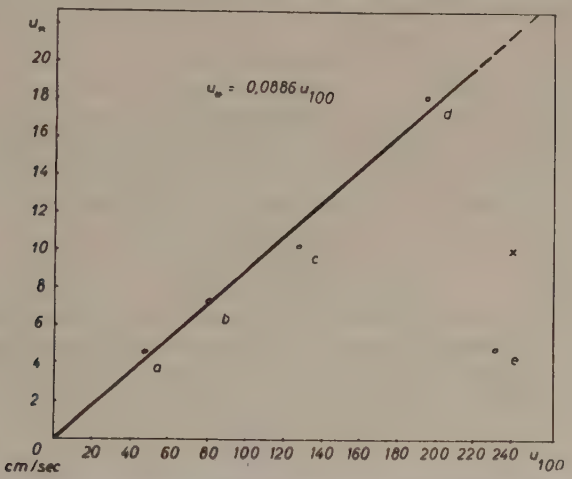


Abb. 8. Schubspannungsgeschwindigkeit u_* in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit u_{100} in 100 cm Höhe. (× ... von H. U. Roll erhaltener Vergleichswert bei niedrigster Windgeschwindigkeit über dem Wattenmeer.)

untersten Schicht scheinen die Prandtlschen Ansätze recht gut erfüllt zu sein. Oberhalb dieser Schicht kann die Schubspannungsgeschwindigkeit, selbst wenn keine störende Brücke vorhanden wäre, nicht mehr als höhenkonstant angesehen werden, sondern sie muß sich dem Werte 0 nähern (bei Windstille in höheren Schichten). Eine Gesetzmäßigkeit dieses Überganges gegen 0 konnte aus dem vorliegenden Material nicht abgeleitet werden.

Tabelle 4. *Charakteristische Größen der Windprofile a—e in Abb. 8.*

Gerade	u_*	z_0	u_{100}
a	4.54	1.59	47.6
b	7.23	1.134	80.9
c	10.14	0.648	127.8
d	17.83	1.296	193.5
e	4.70	4.3×10^{-6}	230.3

Bei einer Relativgeschwindigkeit von mehr als 200 cm/sec in 70 cm Höhe ändern sich die Verhältnisse grundlegend. Die Gerade e zeigt plötzlich eine viel geringere Schubspannung und der Rauhigkeitsparameter sinkt sprunghaft auf $z_0 = 4.3 \cdot 10^{-6}$ cm ab. Zugleich mit der höheren Relativgeschwindigkeit wurde an der Wasseroberfläche das

Auftreten von winderzeugten Kapillarwellen beobachtet. Durch diese scheint die natürliche Rauhigkeit, die sich in den turbulenzerzeugten Oberflächenwellen äußert, unterdrückt zu werden, was zu einer plötzlichen Herabsetzung des Rauhigkeitsparameters führt.

Zum Vergleich sind in Abb. 7 strichliert die drei mittleren Windprofile bei niedrigen Windgeschwindigkeiten angegeben, die von ROLL [7] über ruhendem Wasser gemessen wurden und einen Rauhigkeitsparameter über einer „glatten" Grenzfläche in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^{-3} cm aufweisen. Infolge der erhöhten Turbulenz bei stärkerem Talaufwind ist vermutlich das Beobachtungsmaterial, aus dem die Gerade e durch Mittelung entstanden ist, unzureichend. Überdies erscheint es fraglich, ob bei stärkerer, überlagerter Luftbewegung die PRANDTLschen Ansätze über den Mischungsweg (lineare Zunahme mit der Höhe) noch gelten. Weitere Messungen, vor allem im Sprungbereich des Rauhigkeitsparameters, würden zur Klärung dieser Frage beitragen.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. A. DEFANT und Herrn Doz. Dr. H. HOINKES, Innsbruck, für ihre wertvollen Ratschläge und ihr lebhaftes Interesse bei der Abfassung vorliegender Arbeit danken. Der Universitätsbund Innsbruck ermöglichte durch einen finanziellen Zuschuß die Anschaffung des photographischen Materials. Herr Jörg KLIMA assistierte bei den Messungen.

Literatur.

1. BRUCH, H.: Die vertikale Verteilung von Windgeschwindigkeit und Temperatur in den untersten Metern über der Wasseroberfläche. Veröff. Inst. f. Meeresk., Neue Folge, A. Heft 38, Berlin 1940.
2. BÜDEL, A.: Individuelle Bewegungen kleiner Luftmassen. Beitr. Phys. fr. Atm., **20**, 214 (1933).
3. — Eine photogrammetrische Methode zum Studium der Strömungs- und Austauschvorgänge. Beitr. Phys. fr. Atm., **20**, 9 (1933).
4. PAESCHKE, W.: Experimentelle Untersuchungen zum Rauhigkeits- und Stabilitätsproblem in der bodennahen Luftschicht. Beitr. Phys. fr. Atm., **24**, 163 (1938).
5. PRANDTL, L.: Meteorologische Anwendung der Strömungslehre. Beitr. Phys. fr. Atm., **19**, 188 (1932).
6. — Führer durch die Strömungslehre. Braunschweig 1942.
7. ROLL, H. U.: Wassernahes Windprofil und Wellen auf dem Wattenmeer. Ann. Meteorol. **1**, 139 (1948).
8. — Neue Messungen zur Entstehung von Wasserwellen durch Wind. Ann. Meteorol. **4**, 269 (1951).
— Über die Existenz einer laminaren Grenzschicht unmittelbar über der Meeresoberfläche. Ann. Meteorol. **1**, 206 (1948).
10. — Über die vertikale Temperaturverteilung in der wassernahen Luftschicht. Ann. Meteorol. **1**, 353 (1948).
11. — Gedanken über den Zusammenhang der vertikalen Profile von Windgeschwindigkeit und Temperatur in der wassernahen Luftschicht. Ann. Meteorol. **3**, 1 (1950).
12. SCHMIDT, W.: Strömungsforschung in freier Luft. Meteorol. Z. **46**, 495 (1929).
13. — Neue Ergebnisse über die Struktur des Windes. Z. Geophys. **4**, 376 (1928).

631.43:550.3

(Meteorologisches Institut der Technischen Hochschule, Karlsruhe.)

Das bewegliche Luftvolumen des Erdbodens.[1]

Von

T. Gilbert.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das für die Bodenatmung wesentliche, bewegliche Luftvolumen wird in Abhängigkeit von der Tiefe aus der Absorption von Druckwellen im Boden abgeleitet. Zur Prüfung werden periodische Druckwellen künstlich erzeugt und in verschiedenen Erdbodentiefen gemessen und registriert.

Summary. The volume of moving air, which is essential for the respiration of the soil, has been calculated with the dependency on depth from absorption of pressure waves in the soil. The results have been controlled by experiments with artificial periodic pressure waves which are measured and registered at different depths in the soil.

Résumé. Le volume d'air mouvant qui est d'importance essentielle pour la respiration du sol, est déduit de l'absorption d'ondes de pression dans le sol et de leur dépendance de la profondeur. Pour vérifier la théorie, l'auteur produit des ondes de pression artificielles et périodiques qui sont ensuite mesurées et enregistrées à diverses profondeurs.

I. Einleitung.

Nachdem W. Schmidt und P. Lehmann [*10*] die ausschlaggebende Rolle, die rasche Schwankungen des Druckes für die Bodenatmung spielen, erkannt hatten, entwickelte M. Diem [*1*] eine Meß- und Registriermethode, um die Luftdruckschwankungen in verschiedenen Erdbodentiefen zu erfassen. Im Prinzip werden bei dieser Methode künstlich erzeugte Druckwellen auf den Erdboden gegeben, mittels Düsen in verschiedenen Tiefen abgenommen und zu Membranmanometern geleitet. Eine optische Anordnung erlaubt die Photographie der Druckwellen. Der Aufbau und die Dimensionierung des Systems ist in Abschnitt III beschrieben. Es ist hiermit möglich, die Absorption der Druckamplitude im Boden genau zu verfolgen. Da die Ausbreitung der Welle, beziehungsweise die momentan vorhandene Druckamplitude vom be-

[1] Die Arbeit wurde mit Unterstützung des Bundesministeriums für Ernährung, Landwirtschaft und Forsten und der Karlsruher Hochschulvereinigung durchgeführt.

weglichen Luftvolumen des Bodens abhängt, muß eine quantitative Beziehung zwischen beiden Größen bestehen.

Von O. LUCKE und S. ROSE [6] liegt bereits eine theoretische Bearbeitung des Problems vor. Sie gründet sich auf empirische Ergebnisse von M. MUSKAT und H. G. BOTSET [4], welche die Formel

$$k\frac{\Delta \overline{p}^2}{l} = (\varrho\, v)^n \qquad (1)$$

für Gasströmungen durch poröse Medien durch zahlreiche Experimente bestätigten. Hierin bedeuten $\Delta \overline{p}^2$ die Differenz der Quadrate der Drucke zu beiden Seiten einer homogenen Materialschicht mit der Dicke l, ϱ die Dichte des Gases, k den Durchlässigkeitskoeffizienten des porösen Mediums, n eine von der Porosität abhängige Zahl ($1 \leqq n \leqq 2$) und v die effektive Geschwindigkeit (= der Quotient aus der pro sec fließenden Gasmenge und dem Querschnitt des mit porösem Material gefüllten Zylinders). LUCKE und ROSE setzen $n = 1$ und nehmen für k den Durchlässigkeitsfaktor von Sand an. Aus Gleichung (1), der Kontinuitätsgleichung (10) und der allgemeinen Gasgleichung erhalten sie eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung für den Druck von der Form der Wärmeleitungsgleichung. Das Verhältnis des beweglichen Luftvolumens zum Gesamtvolumen f, sowie n und k sind konstant, da ein homogenes Medium vorliegt. Beim natürlichen Boden ist diese Voraussetzung der Homogenität nicht mehr gegeben. Wenn man auch $n = 1$ für alle Bodenarten mit genügender Genauigkeit beibehalten kann, so variieren doch k und f erheblich mit der Bodenart und der Tiefe. Diese Verallgemeinerung macht das mathematische Problem wesentlich schwieriger. Da k nun nicht mehr konstant ist, fehlt außerdem eine zusätzliche Beziehung für den Durchlässigkeitsfaktor.

Diese Gesichtspunkte gaben den Anlaß zu einer theoretischen Neubearbeitung.

II. Theorie der Druckabsorption im Erdboden.

Da man die verwendeten Druckschwankungen als Schall sehr tiefer Frequenz ansprechen kann, wurden in der vorliegenden Arbeit die Schallabsorptionstheorien von RAYLEIGH und LAMB als Grundlagen benutzt [8, 5].

A. Bedeutung der Symbole.

p (dyn cm^{-2}) ..... momentaner Gesamtdruck,
p_o (dyn cm^{-2}) ..... äußerer Luftdruck,
p_m (dyn cm^{-2}) ..... maximale Druckauslenkung,
$n = 2\pi\nu$ (Hz) ..... Kreisfrequenz der Druckwellen,
$c = \sqrt{\frac{K p_o}{\varrho}}$ (cm sec^{-1}) .. Schallgeschwindigkeit nach LAPLACE,
u (cm sec^{-1}) ..... ortsabhängige Partikelgeschwindigkeit,
$\mathfrak{u}$ (cm sec^{-1}) ..... Geschwindigkeitsvektor,
$\bar{u}$ (cm sec^{-1}) ..... mittlere Partikelgeschwindigkeit über 1 cm^2,
$\bar{u}_o$ (cm sec^{-1}) ..... mittlere Partikelgeschwindigkeit über 1 Pore,
z (cm) ..... Erdbodentiefe,

F_o (cm²) ..... Öffnungsfläche,
$F_{ges.}$ (cm²) ..... Gesamtfläche,
do (cm²) ..... Oberflächenelement,
$V_{bew.}$ (cm³) ..... bewegliches Luftvolumen,
$V_{ges.}$ (cm³) ..... Gesamtvolumen,
$d\tau$ (cm³) ..... Raumelement,
$f = \frac{V_{bew.}}{V_{ges.}}$ ..... Verhältnis des beweglichen Luftvolumens zum Gesamtvolumen,
λ ..... Verhältnis der undurchlöcherten zur durchlöcherten Oberfläche,
r (cm) ..... Porenradius,
r' (cm) ..... radiale Variable des Porenradius,
a (cm^{-2}) ..... Porenanzahl/cm² (Flächendichte der Poren),
t (sec) ..... Zeit,
ϱ (g cm^{-3}) ..... Luftdichte,
$\mu = 0{,}0001733$ (g sec^{-1} cm^{-1}) Zähigkeit der Luft,
$\mu' = \frac{\mu}{\varrho} = 0{,}1343$ (cm² sec^{-1}) kinematischer Viskositätskoeffizient der Luft,
$K = \frac{C_p}{C_v} = 1{,}41$ ..... Verhältnis der spezifischen Wärmen,
R' (dyn cm^{-4} sec) ..... Reibungskoeffizient nach Lamb (für eine Pore gültig),
I_a (erg cm^{-2} sec^{-1}) ..... Intensität der auftreffenden Welle,
I_r (erg cm^{-2} sec^{-1}) ..... Intensität der reflektierten Welle,
I_d (erg cm^{-2} sec^{-1}) ..... Intensität der durchdringenden Welle,
$x = \frac{I_d}{I_a}$ ..... Intensitätsverhältnis,
T, R, g ..... bedeuten Temperatur, Gaskonstante und Schwerebeschleunigung.

B. Voraussetzungen.

Es wird angenommen, daß die Poren einen kreisförmigen Querschnitt haben und gleichmäßig über die Flächeneinheit verteilt sind; es sollen ebene Wellen vorliegen und der Schwingungsvorgang soll isotherm verlaufen. Ferner sei

$$\frac{\partial a}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial c}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial p_m}{\partial t} = 0$$

C. Entwicklung der angewandten Beziehungen.

1. *Das Poiseuille'sche Gesetz.*

In seiner dynamischen Schalltheorie macht H. Lamb [5] es von der linearen Größe

$$h = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu'}{4\pi\nu}}$$

abhängig, ob die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ über dem Querschnitt durch ein angenähert statisches Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten

in z-Richtung und der Reibung an den Wänden bestimmt ist. h muß in diesem Falle vergleichbar oder größer als der Porendurchmesser $2r$ sein. Da die Frequenz im vorliegenden Falle von der Größenordnung 1 Hz ist, ergibt sich $h \approx 1{,}29$ (cm) und die LAMB'sche Beziehung

$$R' \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \tag{2}$$

ist hier anwendbar. p ist der mittlere Druck und kann gleich dem gemessenen Druck p gesetzt werden. R' ist ein Widerstandskoeffizient, der von der Natur des fließenden Mediums und dem Querschnitt der Pore abhängt. Für eine kreisrunde Pore ist

$$R' = \frac{8\mu}{r^2}. \tag{3}$$

Dieser Wert von R' ist nach LAMB identisch mit demjenigen, der sich aus dem Poiseuille'schen Gesetz ergibt, wenn eine inkompressible Flüssigkeit unter Druck durch eine kapillare Röhre fließt.

Zu demselben Ergebnis kommt CL. SCHÄFER [9] bei der Darstellung des Poiseuille'schen Gesetzes für eine parallele Strömung in einem zylindrischen Rohr. Durch einen Zylinder mit der Öffnungsfläche $r^2\pi$ strömt pro sec das Quantum

$$Q = \bar{u}_0 r^2 \pi. \tag{4}$$

SCHÄFER leitet aus den Bewegungsgleichungen für Flüssigkeiten den Wert

$$u = \frac{A}{4}(r^2 - r'^2) - \frac{\mu A}{2 k_2} r' \tag{5}$$

ab, wobei

$$A = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varrho g}{\mu}.$$

Das Glied $\frac{\varrho g}{\mu}$ kann vernachlässigt werden, da der Einfluß der Schwerkraft sehr gering ist. Die Konstante der äußeren Reibung k_2 kann gleich ∞ gesetzt werden, was aus der Annahme folgt, daß benachbarte Teilchen zu beiden Seiten der Außenfläche keine relative Geschwindigkeit zueinander haben. Damit tritt an Stelle von Gleichung (5) die Beziehung

$$u = \frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}(r^2 - r'^2)$$

und statt (4)

$$Q = -\frac{\pi}{8\mu} r^4 \frac{\partial p}{\partial z} \equiv \bar{u}_0 r^2 \pi.$$

Daraus ergibt sich

$$\bar{u}_0 = -\frac{r^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z};$$

dies ist der Lamb'sche Wert aus (2) und (3).

Der Mittelwert der Geschwindigkeit über a Kapillaröffnungen gleichen Durchmessers ist dann ebenfalls

$$\bar{u}_1 \equiv \bar{u}_0 = -\frac{r^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{6}$$

Über dem undurchlöcherten Rest der Fläche ist die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_2 = o$. Eine Pore hat die horizontale Öffnungsfläche $r^2\pi$. Da sich auf der Gesamtfläche $F_{\text{ges.}} = 1\ \text{cm}^2$ a Poren befinden, ist das Verhältnis der durchlöcherten Fläche zur Gesamtfläche $\frac{F_o}{F_{\text{ges.}}} = \frac{a\pi r^2}{1}$. Multipliziert man Zähler und Nenner mit 1 cm, so erhält man das definierte Volumenverhältnis f zu

$$f = \frac{V_{\text{bew.}}}{V_{\text{ges.}}} = \frac{F_o}{F_{\text{ges.}}} = a\pi r^2. \tag{7}$$

Aus (6) (7) erhält man, wenn f das Verhältnis der durchlöcherten Fläche zur Gesamtfläche ist, die gesamte mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ zu

$$\bar{u} = -\frac{r^2}{8\mu} f \frac{\partial p}{\partial z}. \tag{8}$$

In Gleichung (8) muß das nicht meßbare $\bar{u}$ ersetzt werden. Die Beziehung hierfür liefern die Kontinuitätsgleichung und die allgemeine Gasgleichung.

2. *Kontinuitätsgleichung und allgemeine Gasgleichung.*

Die Kontinuitätsgleichung

$$\oint \varrho\, \mathfrak{u}\, do = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\text{ges.}}} \varrho\, d\tau \tag{9}$$

sagt aus, daß die pro sec durch die Oberfläche eines beliebigen Volumens austretende Luftmasse gleich der sekundlichen Abnahme der in dem Raumteil befindlichen Luftmenge ist. Da nur $V_{\text{bew.}}$ von Luft erfüllt ist, ist $\int_{V_{\text{ges.}}} \varrho\, d\tau = \varrho\, V_{\text{ges.}}$ (ϱ der Einfachheit halber konstant angenommen) nicht die im Raum $V_{\text{ges.}}$ befindliche Luftmenge. Vielmehr befindet sich im Integrationsraum $V_{\text{ges.}}$ die Luftmenge $\varrho V_{\text{bew.}} = f \varrho V_{\text{ges.}}$ oder in Integralform $\int_{V_{\text{ges.}}} f \varrho\, d\tau$.

Damit wird aus (9)

$$\oint \varrho\, \mathfrak{u}\, do = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_{\text{ges.}}} f \varrho\, d\tau.$$

Daraus folgt nach Anwendung des Gauss'schen Satzes

$$\operatorname{div}(\varrho \mathfrak{u}) = -f \frac{\partial \varrho}{\partial t}.$$

Das Volumenverhältnis f ist zeitlich konstant. Eine Strömung findet nur in z-Richtung statt. Infolgedessen lautet die Kontinuitätsgleichung in Koordinatenform

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial z} + u \frac{\partial \varrho}{\partial z} + f \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

ϱ läßt sich aus der allgemeinen Gasgleichung

$$p = \varrho R T \text{ durch } p \text{ ersetzen.} \tag{11}$$

T ist laut Voraussetzung konstant. Dann ergibt sich aus (10) mit $u \approx \bar{u}$ als mittlerer Geschwindigkeit über die horizontale Flächeneinheit

$$\frac{f}{p}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

In dieser Gleichung wird $\bar{u}$ mittels Gleichung (8) substituiert. Dies ergibt mit $f = a\,\pi\,r^2$ nach einfacher Umformung

$$\frac{8\mu}{p}\frac{\partial p}{\partial t} - r^2\left[\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right] - 4r\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial z} = 0. \tag{13}$$

3. Schwingungsgleichung.

Die in (13) geforderten Ableitungen des Luftdrucks sind bei natürlichen Luftdruckschwankungen nur graphisch oder nach vorheriger Fourieranalyse durchführbar. Zur Vereinfachung kann man periodische, künstlich erzeugte Druckschwankungen, die angenähert eben auf die Erdoberfläche auftreffen, verwenden. Solche Wellen in z-Richtung werden durch die Beziehung

$$p = p_o + p_m \sin n\left(t - \frac{z}{c}\right) \tag{14}$$

dargestellt. Hierbei sind der äußere Luftdruck p_o, die Kreisfrequenz n und die Schallgeschwindigkeit c unabhängig von der Erdbodentiefe z und der Zeit t. Die Amplitude p_m ist nur wegabhängig.

Die entsprechenden Ableitungen von (14) werden in Gleichung (13) eingeführt:

$$\frac{8\mu}{p}\,n \cdot p_m \cos n\left(t - \frac{z}{c}\right) - r^2\left[\frac{1}{p}\,p_m'^2 \sin^2 n\left(t - \frac{z}{c}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{p}\left(\frac{n}{c}\right)^2 p_m^2 \cos^2 n\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{2}{p}\,\frac{n}{c}\,p_m'\,p_m \sin n\left(t - \frac{z}{c}\right)\cdot\cos n\left(t - \frac{z}{c}\right) +$$

$$\left. + p_m'' \sin n\left(t - \frac{z}{c}\right) - 2\,\frac{n}{c}\,p_m' \cos n\left(t - \frac{z}{c}\right) - \left(\frac{n}{c}\right)^2 p_m \sin n\left(t - \frac{z}{c}\right)\right] -$$

$$- 4r\left[p_m' \sin n\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{n}{c}\,p_m \cos n\left(t - \frac{z}{c}\right)\right]\frac{\partial r}{\partial z} = 0. \tag{15}$$

(15) ist für alle Werte von t gültig. Setzt man $t = 0$ und vereinfacht:

$$\cos\left(-n\frac{z}{c}\right) = \cos n\frac{z}{c} \approx 1$$

$$\sin\left(-n\frac{z}{c}\right) = -\sin n\frac{z}{c} \approx -n\frac{z}{c}$$

für alle Werte, da $n\frac{z}{c} \leqq 53'$,

sowie $p = p_o - p_m \cdot n \cdot \frac{z}{c} \approx p_o$, da $p_o \sim 10^6$ und $p_m \cdot n\frac{z}{c} \leqq 10^1$, dann erhält man

$$\frac{8\mu\,n}{p_o}\,p_m - r^2\left[\frac{p_m'^2}{p_o}\left(n\,\frac{z}{c}\right)^2 + 2\,\frac{p_m p_m'}{p_o}\left(\frac{n}{c}\right)^2 z + \left(\frac{n}{c}\right)^2\frac{p_m^2}{p_o} - p_m''\,\frac{n}{c}\,z\right.$$

$$\left. - 2\,\frac{n}{c}\,p_m' + \left(\frac{n}{c}\right)^3 p_m z\right] - 4\,r\left[-p_m'\,\frac{n}{c}\,z - \frac{n}{c}\,p_m\right]\frac{\partial r}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

4. Oberflächenbedingung.

(16) hat keine Gültigkeit für die Reflexionsverhältnisse an der Oberfläche. Hierfür wird die Schallreflexionsgleichung an einer porösen Oberfläche von RAYLEIGH herangezogen. RAYLEIGH entwickelt folgende Formel des Intensitätsverhältnisses [8]

$$\frac{I_r}{I_a} = \frac{2M^2 - 2M + 1}{2M^2 + 2M + 1}$$

und daraus

$$\frac{I_d}{I_a} = \frac{4M}{2M^2 + 2M + 1}. \tag{17}$$

M ist eine Abkürzung für $M = (1 + \lambda)\frac{m'}{k_o}$.

k_o mit der Bedeutung $k_o = \frac{n}{c}$ ist nur frequenzabhängig. $m' = \frac{\sqrt{4 K n \mu'}}{c r}$ ist zusätzlich noch variabel mit dem Porenradius r. Die Größe $1 + \lambda = 1 + \frac{F_{\text{ges.}} - F_o}{F_o}$ ist identisch mit $\frac{1}{f}$. Daraus ergibt sich schließlich M zu $M = \frac{1}{f \cdot r}\sqrt{\frac{2 K \mu'}{\pi \nu}}$, wobei $\sqrt{\frac{2 K \mu'}{\pi}} = 0{,}3446$; setzt man noch

$$I_d = \frac{p^2 m d}{2 \varrho c} \qquad I_a = \frac{p^2 m a}{2 \varrho c} \qquad x = \frac{I_d}{I_a} = \frac{p^2 m d}{p^2 m a}$$

und löst die Gleichung nach (fr) auf, dann ergibt sich

$$fr = \left[\left(\frac{2}{x} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{x} - 1\right)^2 - 2}\right] \cdot 0{,}3446 \frac{1}{\sqrt{\nu}}. \tag{18}$$

RAYLEIGH gibt die anzuwendende Schichtdicke zu $\leqq 10$ cm an. Wegen der großen Rauhigkeit der Erdoberfläche kann man im vorliegenden Fall den maximalen Wert von 10 cm Schichtdicke verwenden.

5. Vereinfachung unter Berücksichtigung der experimentellen Ergebnisse.

(16) läßt sich durch Vernachlässigung einzelner Faktoren von r^2 noch weiterhin vereinfachen. Da es sich nur um einen Vergleich der Größenordnung der Faktoren handelt, und da die Variablen p_m, p_m', p_m'', z in allen Gliedern nur im Zähler stehen, werden ohne Rücksicht auf den funktionalen Zusammenhang nur die Extremwerte von p_m, p_m', p_m'', z verwandt. Aus Abb. 4 lassen sich folgende Extremwerte ablesen:

$$10 \leqq z \leqq 90 \quad 137{,}3 \leqq p_m \leqq 315 \quad 1{,}88 \leqq |p_m'| \leqq 2{,}88 \quad 0 \leqq |p_m''| \leqq 3{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

Weiterhin ist $p_o = 10^6$, $c = 3{,}32 \cdot 10^4$, $n = 2\pi$ bei $\nu = 1$. (Alle Werte im cgs-System angegeben.) Damit wird für den absolut kleinsten und größten Wert:

$$1{,}28 \cdot 10^{-11} \leqq \frac{p_m'^2}{p_o}\left(\frac{n z}{c}\right)^2 \leqq 2{,}42 \cdot 10^{-9}$$

$$1{,}87 \cdot 10^{-10} \leqq \frac{2|p'm|p_m}{p_o}\frac{n^2}{c^2} z \leqq 5{,}9 \cdot 10^{-9}$$

$$6{,}8 \cdot 10^{-10} \leqq \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{p^2 m}{p_o} \leqq 3{,}58 \cdot 10^{-9}$$

$$0 \leqq \left| p_m'' \right| \frac{n}{c} z \leqq 6{,}35 \cdot 10^{-4}$$

$$7{,}15 \cdot 10^{-4} \leqq 2 \left| p_m' \right| \frac{n}{c} \leqq 1{,}1 \cdot 10^{-3}$$

$$9{,}45 \cdot 10^{-9} \leqq \left(\frac{n}{c}\right)^3 p_m z \leqq 1{,}96 \cdot 10^{-7}$$

In die numerische Auswertung gehen also lediglich die Glieder $p_m'' \frac{n}{c} z$, $2 \frac{n}{c} p_m'$ ein. Diese Abschätzungen müssen bei der Untersuchung anderer Böden, bei der Einsetzung einer anderen Zeit t und bei der Verwendung einer anderen Frequenz ν wiederholt werden.

Formel (16) vereinfacht sich nun zu

$$2 r \frac{\partial r}{\partial z} + r^2 \frac{\frac{1}{2} p_m'' z + p_m'}{p_m' z + p_m} = - \frac{4 \mu c}{p_0} \cdot \frac{p_m}{p_m' z + p_m}. \tag{19}$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung in r^2. Nach Multiplikation ihrer Lösung mit $a \pi$ bekommt man für $f = a r^2 \pi$ die Beziehung für das bewegliche Luftvolumen, beziehungsweise für dessen Verhältnis zum Gesamtvolumen

$$f = a\pi e^{-\int \frac{\frac{1}{2} p_m'' z + p_m'}{p_m' z + p_m} dz} \cdot \left[- \frac{4 \mu c}{p_0} \int \frac{p_m}{p_m' z + p_m} \cdot e^{+\int \frac{\frac{1}{2} p_m'' z + p_m'}{p_m' z + p_m} dz} dz + B \right]. \tag{20}$$

Die Konstante B wird durch mikroskopische Messung des mittleren Porendurchmessers an der Erdoberfläche bestimmt, während a aus den Beziehungen (7) und (18) hervorgeht.

6. *Deutung der Endgleichung.*

Schreibt man (20) in der Form $f = B' P(z) [B'' Q(z) + B]$ (B, B', B'' sind konstant), so sieht man, daß f der Funktion $P(z) = e^{-\int \cdots dz}$ proportional ist. Dem Proportionalitätsfaktor $B'B$ überlagert sich noch der Ausdruck $B'B'' Q(z)$ mit $Q(z) = \int \frac{p_m}{p_m' z + p_m} \cdot e^{+\int \cdots dz} dz$. Primär kann man also eine exponentielle Abnahme von f mit P erkennen. Hauptsächlich wird dieser Effekt neben der jeweiligen Amplitude p_m von der Ableitung p_m', d. h. vom Gradienten von p_m beeinflußt.

Die sekundäre Überlagerung des Q-Gliedes bringt eine Verminderung des Proportionalitätsfaktors, die in der Hauptsache von p_m abhängt, mit sich.

III. Anordnung der eigenen Versuche.

1. Druckzylinder und Meßdüsen.

Ein unten offener Eisenblechzylinder (vgl. Abb. 1) von 50 cm ⌀ und 35 cm Länge wird etwa 25 cm tief senkrecht in die Erde eingebohrt. Der 5 mm starke Gußstahldeckel ist abnehmbar und trägt zur Abdichtung einen Gummiring mit Wulst. Die Düsen bestehen aus nahtlosem, ver-

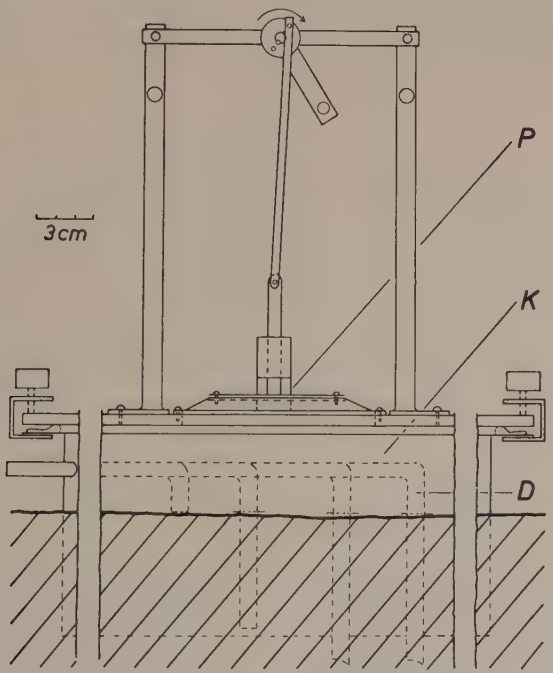


Abb. 1. Druckkessel *K* mit Pumpe *P* und Düsen *D*.

zinktem Eisenrohr von 8 mm lichter Weite. Sie werden mit einem rückziehbaren Silberstahlspeer als Kern senkrecht bis in die gewünschten Erdbodentiefen eingetrieben. Da an der Düsenaußenwand Störungen auftreten können, werden an der Erdoberfläche etwa 4 cm^2 große Gummiplättchen zur Abschirmung um die Düsen gespannt. Über der Erde sind die Düsen horizontal durch die Zylinderwand auf kürzestem Wege zu den Manometern geführt.

2. Pumpe.

Zentral in den Deckel des Versuchszylinders ist ein Loch (vgl. Abb. 1) von 10 cm ⌀ eingeschnitten. Darüber spannt sich eine Gummimembran von 0,5 mm Dicke. Diese liegt zwischen zwei, durch Schrauben verbun-

denen Eisenblechplatten. Auf die obere Platte ist senkrecht ein Stift aufmontiert, der in einer Führung läuft. Der Stift trägt die untere waagrechte Drehachsenschraube der Pleuelstange, während die obere Achsialschraube exzentrisch in einer kreisrunden Scheibe sitzt. Diese Scheibe wird mittels einer Handkurbel gedreht. Ferner ist auf dem Zylinderdeckel ein Gestänge aufgeschraubt, welches die horizontale Lagerung der Pumpenkurbel ermöglicht. Zur Variation des Hubvolumens von 11,7 bis 45 cm^3 sind in die Kurbelscheibe Löcher mit verschiedenem Mittelpunktsabstand eingebohrt, welche die obere Achsialschraube aufnehmen. Mit dieser handbetriebenen Pumpe läßt sich eine sinusförmige Druckschwankung der Frequenz 2—0,2 Hz erzeugen.

3. Manometer.

Die Manometer bestehen aus verzinktem Eisenblechrohr von 6 cm ⌀ und 3 cm Länge. Das Ende der Dose ist verschlossen und mit einem Anschlußstutzen versehen, während die Vorderseite mit einer dünnen Gummihaut überspannt ist. Durch einen exzentrisch auf die Gummihaut geklebten Hohlspiegel mit 19,8 cm doppelter Brennweite werden die Ein- und Auswölbungen der Membran optisch übertragen. Die Empfindlichkeit der Manometer ist variabel mit dem Mittelpunktsabstand der Spiegel. Es ergeben sich 5,24 mm/mmHg Ausschlag auf dem Filmnegativ für den maximalen Abstand von 2,7 cm, bei einer Auswertgenauigkeit von 10^{-2} mmHg.

4. Registriereinrichtung.

Jedem Membranmanometer ist in doppelter Spiegelbrennweite eine 4,5 V Einfadenlampe zugeordnet, deren Lichtstrich durch den Spiegel auf einen Spalt geworfen wird. Der Winkel Lampenmitte — Spiegelzentrum — Spalt beträgt 10 Grad. Die durch den Spalt ausgeblendeten Lichtpunkte werden photographisch registriert. Der Film wird durch einen kleinen Synchronmotor transportiert. Ein dazwischenliegendes, siebenstufiges Getriebe ermöglicht einen Filmvorschub von 1,28 mm/sec bis $7{,}8 \cdot 10^{-5}$ mm/sec. Zeitmarken konnten mit einer Kontaktuhr alle 10 sec (0,1 0,25 1 sec) gegeben werden. Die gesamte Anlage ist in einen Holzkoffer eingebaut und ermöglicht eine völlig synchrone Registrierung mehrerer Meßstellen.

Über die Fehlerquellen der Gesamtanlage hat DIEM [*1*] ausführlich berichtet; seine Ergebnisse wurden berücksichtigt.

IV. Anwendung der Theorie auf die experimentellen Ergebnisse.

1. Eichung der Anlage.

Zur Eichung wurden 4 Membranmanometer und ein Mikromanometer parallel geschaltet und mehrere Druckstufen erzeugt, die photographisch registriert und gleichzeitig am Mikromanometer abgelesen wurden. Abb. 2 zeigt die Ergebnisse. Das Divergieren der Eichkurven ist auf ungleich-

mäßige Spannung der Membranen zurückzuführen. Dieser Effekt hat jedoch in diesen Grenzen keinen Einfluß auf die Meßergebnisse.

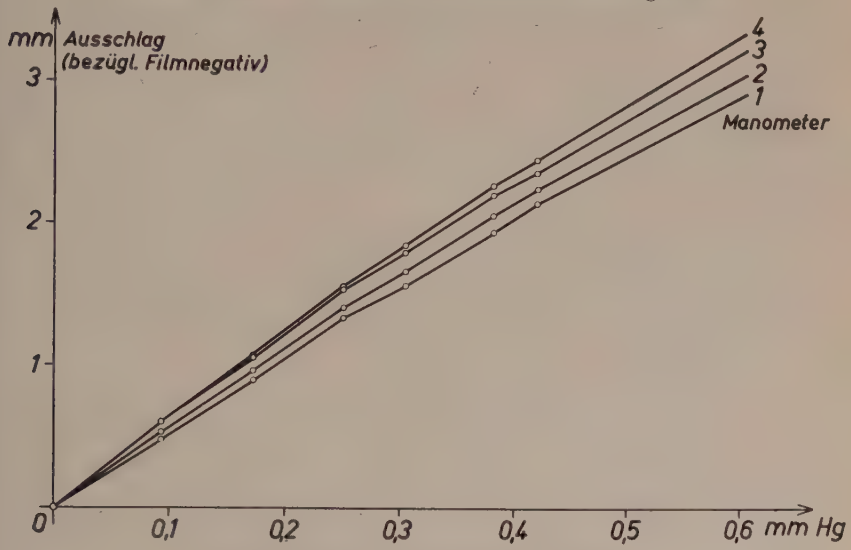


Abb. 2. Eichkurven der Membranmanometer.

2. Messung und Ergebnisse unter natürlichen Verhältnissen.

Da sich an der Meßstelle im Garten des Meteorologischen Instituts der Technischen Hochschule Karlsruhe in 20 cm Tiefe eine 22 cm dicke

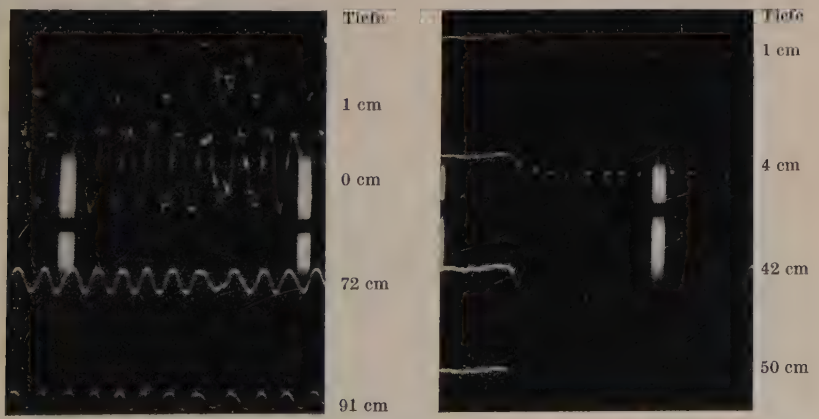


Abb. 3. Registrierung der Druckschwingungen in verschiedenen Tiefen. Der Zeitmarkenabstand beträgt 10 sec.

Schuttschicht befand, wurde ein 110 cm tiefes Loch von 100 cm ∅ ausgehoben. Nach Entfernung der größten Steine (Backstein-, Ziegelreste

usw.) wurde das Loch wieder in gleicher Schichtanordnung wie zuvor zugeschüttet. Es befand sich von

0 — 22 cm Sand vermischt mit Humuserde,
22 — 65 cm feinkörniger Sand,
ab 65 cm Sand vermischt mit Lehm.

Der äußere Luftdruck z. Zt. der Messung war 729,5 mmHg = $9{,}72 \cdot 10^5$ dyn/cm². Der Temperatureinfluß auf die verschiedenen Konstanten wie Schallgeschwindigkeit etc. ist zu geringfügig und wurde daher nicht berücksichtigt.

Der mit der Lupe ausgemessene mittlere Porenradius an der Oberfläche betrug 0,66 mm.

Die photographische Registrierung Abb. 3 zeigt den Verlauf der künstlich erzeugten Druckschwankungen in verschiedenen Tiefen. Die Zeitmarke erscheint alle 10 sec. Wie man sieht, wurden periodische Schwankungen von $\nu = 1$ Hz aufgegeben.

Tabelle 1.

z (cm)	0	1	3	42	50	72	91
p_m (dyn/cm²)	784	524	384	240	225	177,5	137,3

In Tab. 1 sind die gemessenen Druckamplituden p_m aufgeführt. Abb. 4 zeigt den Verlauf der Druckamplitude und der graphisch differenzierten Ableitungen $\frac{\partial p_m}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 p_m}{\partial z^2}$ in Abhängigkeit von der Tiefe z. p_m' und p_m'' sind zur Verdeutlichung relativ zu p_m stark vergrößert gezeichnet.

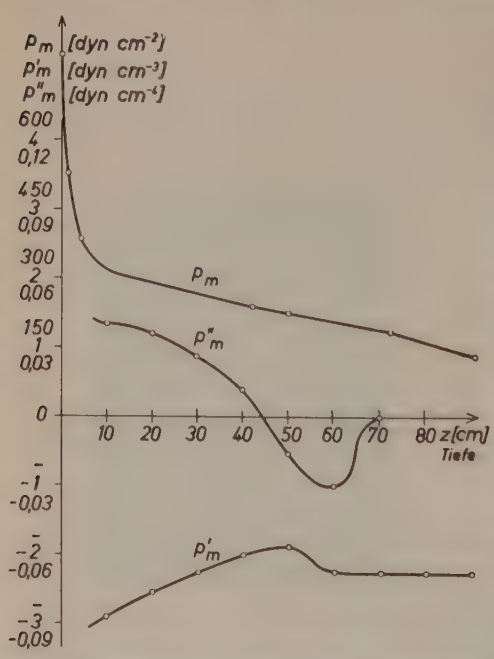


Abb. 4. Absorption der Druckamplitude p_m im Erdboden.

$p'_m = \frac{\partial p_m}{\partial z}$ $\qquad$ $p''_m = \frac{\partial^2 p_m}{\partial z^2}$

Zur Feststellung der Reflexion an der Oberflächenschicht (bis 10 cm Tiefe) wurden aus der Messung die Amplitudenwerte von $p_m = 784$ dyn/cm² für $z = 0$ cm und $p_m = 315$ dyn/cm² für $z = 10$ cm entnommen. Es ergibt sich daraus ein Intensitätsverhältnis

$$x = \frac{I_d}{I_a} = \frac{(315)^2}{(784)^2} = 0{,}1615.$$

Mit diesem Wert und $r = 0{,}066$ cm, sowie $\nu = 1$ Hz erhält man aus (18)

$$f = \frac{0{,}3446}{0{,}066}\left[\left(\frac{2}{0{,}1615} - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{2}{0{,}1615} - 1\right)^2 - 2}\right] = 0{,}46$$

für die Oberflächenschicht.

Diese beiden Werte von $f = 0{,}46$ und $r = 0{,}066$ bestimmen mit (7) den Zusammenhang von f und r zu $f = 107\, r^2$. Damit und mit den Werten $p_o = 9{,}72 \cdot 10^5$ dyn/cm², $c = 3{,}32 \cdot 10^4$ cm/sec, $\mu = 0{,}0001733$ g sec^{-1} cm^{-1} sowie mit den Ergebnissen in Abb. 4 ist es möglich nach dem Czuberschen graphischen Integrationsverfahren direkt aus (19) das Volumen-

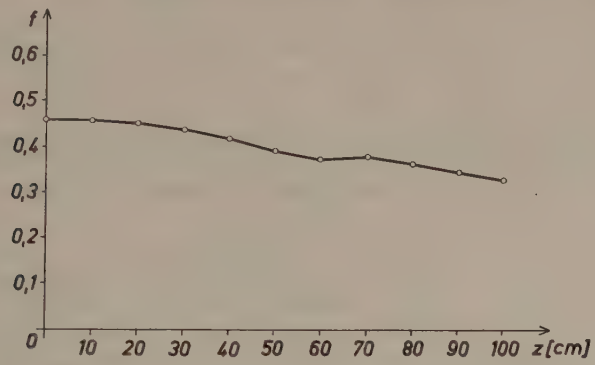


Abb. 5. f in Abhängigkeit von der Tiefe z. $f = \frac{V_{\text{bew.}}}{V_{\text{ges.}}}$

verhältnis $f = \frac{V_{\text{bew.}}}{V_{\text{ges.}}}$ in Abhängigkeit von z zu bestimmen. Abb. 5 zeigt den Verlauf von $f(z)$.

Tab. 2 gibt zusätzlich den mittleren Porenradius r an.

Tabelle 2.

z (cm)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
f	0,46	0,46	0,456	0,443	0,42	0,395	0,376	0,385	0,37	0,354	0,332
r (cm)	6,6	6,6	6,54	6,45	6,28	6,08	5,94	6,0	5,9	5,76	5,57 $\times 10^{-2}$

3. *Folgerungen.*

Aus dem Verlauf der Kurve p_m von z, Abb. 4, folgt eindeutig, daß zwei verschiedene Effekte zur Druckverminderung beitragen. Der starke Abfall der Druckamplitude bis etwa 10 cm Tiefe bestätigt die theoretische Annahme, daß die Verluste hier infolge Reflexion in der Oberflächenschicht eintreten. Eine scharfe Grenzfläche läßt sich wegen der großen Rauhigkeit der Erdoberfläche nicht definieren. Ab 10 cm Tiefe erfolgen die weiteren Verluste annähernd konstant. Hier überwiegt die Druckverminderung infolge Reibung. Die Abweichungen vom konstanten Absinken von $p_m(z)$, d. h. die Ableitung p_m', lassen einen Schluß auf die Inhomogenität des Bodens zu.

Aus dem Verlauf der Kurve $f(z)$, Abb. 5, ist die dreifache Schichtung des Bodens gut zu erkennen. Während in der lockeren Oberflächenschicht das bewegliche Luftvolumen bis 20 cm Tiefe etwa konstant gleich 46% des Gesamtvolumens bleibt, nimmt es bis 60 cm Tiefe stetig ab. In dieser

zweiten Schicht kann das stärkere Absinken des beweglichen Luftvolumens auf 37,6% mit zunehmender Tiefe auf den Einfluß der Schwerkraft, die eine dichtere Packung in der Tiefe bedingt, zurückgeführt werden. Das leichte Ansteigen des beweglichen Luftvolumens von 60—70 cm dürfte auf Reflexion an der Grenzschicht zur dritten Sand-Lehmschicht zurückzuführen sein. Das verhältnismäßig schnelle Absinken auf 33,2% in der dritten Schicht zeigt den Einfluß der Porenverstopfung durch Lehm.

Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Werten von R. KNAPP, H. F. LINSKENS, H. LIETH und F. WOLF [*3*], die nach dem Ausstechverfahren von NITSCH [*7*] arbeiteten und für tonigen Lehm ein gesamtes Porenvolumen von 32,0—63,3% erhielten (Tiefenangaben sind nicht mitgeteilt).

DIEM [*1*] gibt für lockeren Flußsand ein bewegliches Luftvolumen von 39% an (im homogenen Medium gemessen).

Die Methode, das bewegliche Luftvolumen aus dem Abklingen von Druckschwankungen im Erdboden zu bestimmen, hat gegenüber anderen Verfahren den Vorteil, daß die natürlichen Bedingungen nicht beeinflußt werden (durch Aufgraben, Herausnehmen von Proben etc.). Ferner kann ohne Schwierigkeit durch Veränderung der Düsentiefe bis zu einer Grenztiefe jede Bodenschicht abgetastet werden.

Literatur.

1. DIEM, M.: Bodenatmung. Meßtechnik und Ergebnisse, Gerl. Beitr. Geophys. **51**, 146 (1937).
2. INGERSLEV, F. und A. K. NIELSEN: On the transmission of sound through small apertures and narrow slits, Ingeniørvidenskabelige Skrifter. **5**, 1 (1944).
3. KNAPP, R., H. F. LINSKENS, H. LIETH und F. WOLF: Untersuchungen über die Bodenfeuchtigkeit in verschiedenen Pflanzengesellschaften nach neueren Methoden. Ber. D. Botan. Ges. **65**, 113 (1952).
4. MUSKAT, M. und H. G. BOTSET: Gas flow through porous materials. Physics I, 27 (1931).
5. LAMB, H.: The dynamical theory of sound. London 1925.
6. LUCKE, O. und S. ROSE: Wie pflanzen sich die Luftdruckschwankungen im Erdboden fort? Meteorol. Z. **55**, 292 (1938).
7. NITZSCH, W. v.: Porengrößen im Boden, ihre Beziehungen zur Bodenbearbeitung und zum Wasserhaushalt. Halle/Saale 1939.
8. LORD RAYLEIGH: The theory of sound, II. London 1929.
9. SCHÄFER, CL.: Einführung in die theoretische Physik I. Berlin 1950.
10. SCHMIDT, W. und P. LEHMANN: Versuch zur Bodenatmung, S.-B. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl., Abt. IIa, **138**, 823 (1929).

551.521:551.525:551.584.34 (436)

Über den nächtlichen Wärmeumsatz der gefrorenen Gletscheroberfläche.

Von

W. Ambach, Innsbruck.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Nach Messungen am Vernagtferner (Ötztaler Alpen) in ungefähr 3000 m Höhe wird der nächtliche Wärmeumsatz der gefrorenen Gletscheroberfläche studiert. Es zeigt sich, daß die Schmelzwärme des gefrierenden Wassers als wesentliches Teilglied der Wärmebilanz in derselben Größenordnung in Erscheinung tritt wie der fühlbare Wärmestrom aus der Luft zum Eis. Schon ein sehr geringer Schmelzwassergehalt des Eises (geschätzt 0,026 g cm^{-3}) bedeutet für den nächtlichen Energieumsatz eine bedeutende Wärmequelle. Die Abkühlung des Eises dringt in klaren Nächten etwa 10 bis 15 cm in das Eis ein und kann mit 10 bis 15 cal cm^{-2} angegeben werden. Theoretische Ansätze zeigen, daß die nach Frostnächten beobachtete Verzögerung des Beginns des Schmelzvorganges an der Oberfläche bei beginnender kurzwelliger Einstrahlung durch die Annahme eines Absorptionskoeffizienten des Gletschereises von etwa 0,15 cm^{-1} auch quantitativ erklärt werden kann. Die Berechnung der Temperaturänderung des Eises nach Frostnächten wurde auf allgemeinere Störfunktionen erweitert.

Summary. On the basis of measurements carried out on the Vernagtferner (Oetztal Alps) at approximately 3000 m altitude the nocturnal heat balance of the frozen glacier surface is discussed. It was found that the heat of fusion of the freezing water is an essential component of the heat balance showing the same order of magnitude as the heat current from air to ice. A very small melting-water content in the ice (estimated 0,026 g . cm^{-3}) means quite a considerable source of heat for the nocturnal energy exchange. In clear nights, the cooling of the ice reaches depths of 10 to 15 cm and amounts to 10 to 15 cal. cm^{-2}. Theoretical considerations show that the delay of the beginning of the melting-process at the surface observed after frost nights, when short-wave radiation is setting in, can be explained also quantitatively by assuming an absorption coefficient of the glacier ice of about 0,15 cm^{-1}. The calculation of the temperature variation of the ice after frost nights is extended to more generalized perturbation functions.

Résumé. L'auteur présente une étude des échanges calorifiques nocturnes de la surface glaciaire d'après des mesures effectuées à environ 3000 m. d'altitude sur le Vernagtferner dans les Alpes de l'Oetztal. On constate que la chaleur de solidification de l'eau représente dans le bilan thermique un facteur de même ordre de

grandeur que l'apport de chaleur de l'air à la glace. Une faible teneur de la glace en eau de fusion (estimée à 0,026 g . cm^{-3}) constitue pour les échanges calorifiques nocturnes déjà une source de chaleur appréciable. Le refroidissement de la glace par nuits claires se fait sentir jusqu'à 10 à 15 cm de profondeur et représente environ 10 à 15 cal . cm^{-2}. Des considérations théoriques montrent que le retard du début de la fusion superficielle après des nuits à gelée, dès que commence le rayonnement à courte longueur d'onde, s'explique quantitativement en admettant un coefficient d'absorption de la glace d'environ 0,15 cm^{-1}. L'auteur calcule la variation de température de la glace après des nuits à gelée au moyen de fonctions généralisées de perturbation.

Die Kenntnis des nächtlichen Wärmehaushaltes eines Gletschers ist für die Bestimmung des Wärmeumsatzes von Interesse, weil eine exakte Trennung in Tag- und Nachtabschnitt nicht durchführbar ist. Nach Frostnächten muß dem Gletscher eine bestimmte Wärmemenge zugeführt werden, bis die Eistemperatur auf 0°C gestiegen ist; erst dann beginnt bei weiterer Energiezufuhr die Schmelzung des Eises. Es wurde bisher angenommen, daß die hierzu erforderliche Wärmemenge gegenüber dem Gesamtumsatz an Energie während eines Tages relativ klein ist, so daß ihre Vernachlässigung keinen schwerwiegenden Fehler bedeutet. Die Berechtigung dieser Annahme wurde durch Messungen quantitativ geprüft, die am Vernagtferner (Ötztaler Alpen) in 2965 m Höhe im Juli und August 1952 durchgeführt wurden. Einleitend sei Herrn Doz. Dr. H. HOINKES vom Institut für Meteorologie und Geophysik der Universität Innsbruck für seine wertvollen Anregungen und für die Überlassung der Meßinstrumente samt Eichkonstanten, sowie ihm und Herrn Doz. Dr. G. STÖKL für die Mithilfe bei den mühevollen Feldarbeiten gedankt.

I. Die Abkühlung des Eises in Strahlungsnächten.

Wird der Gletscheroberfläche mehr Energie entzogen als zugeführt, dann ist die Differenz der Energiebeträge als Abkühlung des Eises zu messen. Zur Messung der Temperatur im Innern des Gletschers wurden selbstgebaute Thermoelemente (34 Ohm Widerstand) aus Kupferdraht (isoliert mit Rubin-Email und Seide, 0,15 mm Durchmesser) und Konstantandraht (isoliert mit Seide, 0,3 mm Durchmesser) verwendet. Als Vergleichsbad diente eine Eis-Wassermischung, die mit einem guten Thermometer überprüft wurde. Die Eichung wurde vor und nach der Feldarbeit im Laboratorium durchgeführt. Als Galvanometer zur Messung der Thermoströme konnte ein Spiegelgalvanometer mit folgenden Daten verwendet werden: Ruhstrat, Type ESG App. Nr. 197.123, Innenwiderstand 16 Ohm, Schwingungsdauer 1,9 sec, äußerer Grenzwiderstand 60 Ohm, Empfindlichkeit $3{,}2 \cdot 10^{-8}$ A/mm/m. Bei einer Lichtzeigerlänge von 50 cm war die Genauigkeit einer Temperaturmessung $\pm$ 0,13°C.

Für einen Vorversuch zur Messung der Eistemperatur wurden in vertikalen Abständen von 5—10 cm in eine Spaltenwand mit einem Holzbohrer (26 mm Durchmesser) etwa 50 cm tiefe Löcher horizontal in das Eis gebohrt. Es zeigte sich, daß Elemente, die tiefer als 20 cm unter

der Gletscheroberfläche lagen, während der ganzen Nacht konstant Null Grad anzeigten, obwohl Oberflächentemperaturen von —4° C gemessen wurden. Zur endgültigen Temperaturmessung wurden in die Gletscheroberfläche etwa 20 cm tiefe Löcher vertikal gebohrt. Die Bohrlöcher wurden mit Firn ausgefüllt. um eine Fälschung der Temperaturmessung durch eintretende Luft zu verhindern. Die Elemente wurden dadurch auch in ihrer Lage fixiert, diese konnte auf 0,5 cm genau angegeben werden. Eine Fälschung des Meßergebnisses durch den eingebrachten Firn ist kaum anzunehmen, da dieser eine äußerst kleine Wärmekapazität darstellt. In 2 Löcher wurden 11 Elemente in verschiedenen Tiefen verteilt. Bei Beginn der kurzwelligen Einstrahlung mußte die Messung der Eistemperaturen wegen zu großer Absorption der Elemente abgebrochen werden. Eine Beschattung der Meßstelle verbesserte das Ergebnis kaum, weil der Strahlungsfehler auch durch Streustrahlung zustande kommt. Der Strahlungsfehler war bis in Tiefen von über 10 cm bemerkbar.

Messungen der Eistemperaturen wurden in 8 Nächten durchgeführt. Der gesamte Energieverlust des Gletschereises pro Nacht und cm² wird mit F bezeichnet. Da zu Beginn der Abkühlung im Gletscher die konstante Temperatur $T = 0°\,\mathrm{C}$ herrscht, ist F aus folgender Beziehung zu ermitteln:

$$F = \varrho\, c \int_0^\infty T(z)\, dz \qquad \mathrm{cal\,cm^{-2}}\ ; \tag{1}$$

darin bedeuten: ϱ die Dichte des Eises, c die spezifische Wärme des Eises, $T(z)$ die Temperatur in der Tiefe z bei Sonnenaufgang. Für die 8 Nächte (18 Uhr bis 6 Uhr) ergaben sich für den Energieverlust in cal cm^{-2} sowie für die mittlere Bewölkung die Zahlen der Tabelle 1.

Tabelle 1. *Energieverlust der Gletscheroberfläche in cal cm^{-2} und mittlere Bewölkung in den einzelnen Nächten, 18 bis 06 Uhr Vernagtferner, 2965 m, Juli/August 1952.*

Nacht	26./27.	27./28.	29./30.	30./31.	31./1.	1./2.	2./3.
Energieverlust	10,6	0,0	8,5	10,6	0,4	0,0	1,7
Bewölkung	2	6	2	2	8	8	4

Einige Diagramme, die den zeitlichen Verlauf der Abkühlung enthalten, seien hier kurz diskutiert. Der Temperaturverlauf in der Nacht 26./27. 7. 1952 (Abb. 1a) scheint repräsentativ für klare ungestörte Bedingungen zu sein. Die Oberflächentemperatur zeigt ein Absinken annähernd parabolisch mit der Zeit. Abb. 1b läßt in der Nacht 29./30. 7. 1952 eine auffallend tiefe Oberflächentemperatur erkennen. Die Ursache kann darin liegen, daß es die erste Nacht nach einem Schlechtwettereinbruch mit Schneefall war. Der Thermograph, der die Lufttemperatur in 10 cm Höhe über der Gletscheroberfläche registrierte, zeigte eine Mitteltemperatur von —3,5° C. Das Gletschereis war mit etwas verfirntem Neuschnee bedeckt, doch wurde an der Meßstelle der Schnee weggeräumt, um die Eistemperaturen zu messen. Für den Abkühlungsbetrag ist jedoch nicht nur die Beschaffenheit dieser etwa 1 m² großen aperen Gletscheroberfläche maßgebend, sondern auch die Umgebung,

da horizontale Temperaturunterschiede sicher durch Wärmeströme weitgehend ausgeglichen werden. Es ist bekannt [2], daß sich eine Schneeoberfläche durch Ausstrahlung stärker abkühlt als eine Eisoberfläche. Der Temperaturverlauf in Tiefen $z > 2$ cm ist als normal zu bezeichnen. Der Temperaturverlauf der Nacht 30./31. 7. 1952 (Abb. 1c) erscheint ebenfalls typisch, wenn auch nicht ganz störungsfrei. In der Nacht 2./3. 8. 1952 (Abb. 1d) wurde an der Oberfläche zum Teil leicht positive Temperatur registriert. Das betreffende Element lag auf der Eisoberfläche

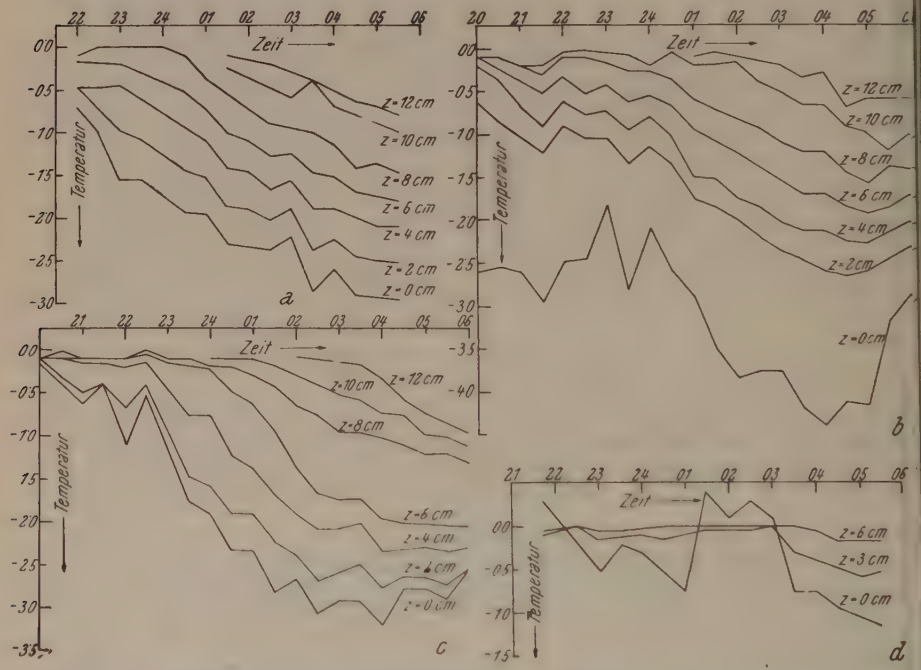


Abb. 1. Der zeitliche Verlauf der Eistemperaturen für verschiedene Tiefen z in der Nacht. *a)* 26./27. 7. 1952, *b)* 29./30. 7. 1952, *c)* 30./31. 7. 1952, *d)* 2./3. 8. 1952.

und registrierte die Temperatur der angrenzenden Luftschicht zum Teil mit, die zu diesem Zeitpunkt positiv war. Am besten ermittelt man vermutlich die Oberflächentemperatur dadurch, daß man den Temperaturverlauf in Tiefen $z > 0$ für die Oberfläche extrapoliert.

Die Beeinflussung der Eistemperaturen durch die effektive Ausstrahlung wurde durch gleichzeitige Messungen der Strahlungsbilanzen mit dem ventilierten Strahlungsbilanzmesser von *F. Sauberer* [3,10] studiert. Die Genauigkeit der Messung der Strahlungsbilanz wird zum Teil durch den Ablesefehler am Galvanometer bestimmt. Zehntelskalenteile mußten geschätzt werden, woraus ein mittlerer Fehler von $\pm$ 0,003 cal cm^{-2} min^{-1} resultiert. In den Abbildungen 2a und 2b wird der zeitliche Verlauf der effektiven Ausstrahlung in den Nächten 26./27. 7. 1952 sowie

2./3. 8. 1952 wiedergegeben. Dem konstanten Betrag der effektiven Ausstrahlung von 23 Uhr des 26. 7. 1952 bis 4 Uhr des 27. 7. 1952 (Abb. 2a) entspricht ein fast störungsfreier Verlauf der Abkühlung des Eises (Abb. 1a). Die Nacht vom 2./3. 8. 1952 (Abb. 2b) bietet ein gutes Beispiel für den Einfluß der Ausstrahlung auf die Eistemperaturen. Mit Verminderung des Betrages der effektiven Ausstrahlung, verursacht durch aufziehende Wolken um etwa 1 Uhr am 3. 8. 1952, steigt die Ober-

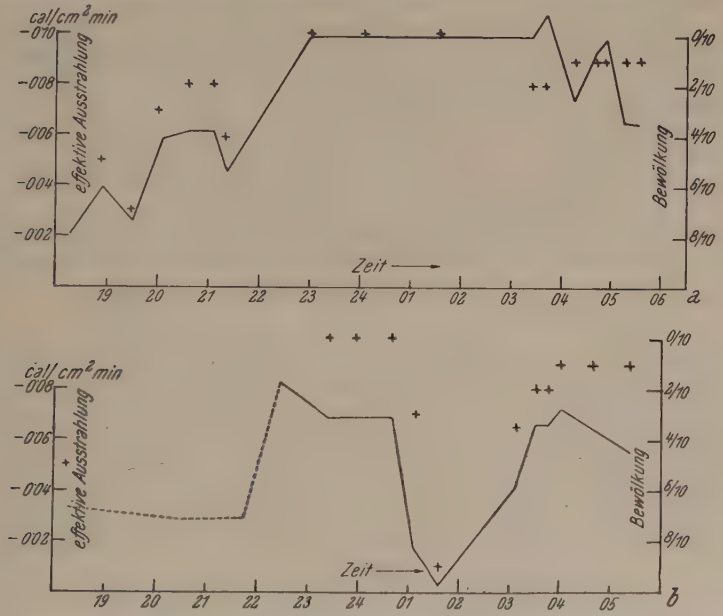


Abb. 2. Der zeitliche Verlauf der effektiven Ausstrahlung (ausgezogene Kurve) und geschätzte Bewölkung (Kreuze). *a)* 26./27. 7. 1952, *b)* 2./3. 8. 1952 (der strichlierte Verlauf der Kurve ist aus Bewölkungsschätzungen ermittelt worden).

flächentemperatur sehr rasch an (Abb. 1d). Mit zunehmender effektiver Ausstrahlung um 3.30 Uhr sinkt die Oberflächentemperatur erneut auf —0,75°C und tiefer. Der Einfluß der Windgeschwindigkeit auf die Eistemperatur ist dabei nicht berücksichtigt; er ist in Strahlungsnächten sicher sehr gering.

Der Zusammenhang zwischen Bewölkung und effektiver Ausstrahlung wird gewöhnlich mit der bekannten Ångströmschen Formel

$$A_i = A_o \left(1 - k \frac{i}{10}\right) \tag{2}$$

beschrieben, wobei k eine Wolkenkonstante und i die Bewölkungsmenge bedeuten. H. Hoinkes und N. Untersteiner [3] weisen darauf hin, daß ihre Messungen der effektiven Ausstrahlung durch eine Formel der Art

$$A_i = A_o \left[1 - k \left(\frac{i}{10}\right)^2\right] \tag{3}$$

besser angenähert werden können. Es liegen 90 Beobachtungen der effektiven Ausstrahlung und der Bewölkung vor, die in dieser Hinsicht untersucht werden können. Tabelle 2 gibt die Ergebnisse der Beobachtun-

Tabelle 2. *Gemessene und berechnete effektive Ausstrahlung (cal cm^{-2} min^{-1}) in Abhängigkeit von der Bewölkung. Vernagtferner, 2965 m, Juli/August 1952.*

Bewölkungsmenge	0	1	2	3	4	5
Zahl d. Beobachtungen	30	17	12	6	10	3
eff. Ausstrahlung beob.	—0,086	—0,083	—0,077	—0,075	—0,060	—0,058
eff. Ausstrahlung ber.	—0,082	—0,081	—0,079	—0,073	—0,066	—0,057

Bewölkungsmenge	6	7	8	9	10
Zahl d. Beobachtungen	0	5	5	2	0
eff. Ausstrahlung beob.	—	—0,029	—0,018	—0,002	—
eff. Ausstrahlung ber.	—0,046	—0,032	—0,017	—0,000	+0,020

gen, geordnet nach Bewölkungsstufen. Die Zahl der Beobachtungen bei dichter Bewölkung ist kleiner, weil der Strahlungsbilanzmesser vor

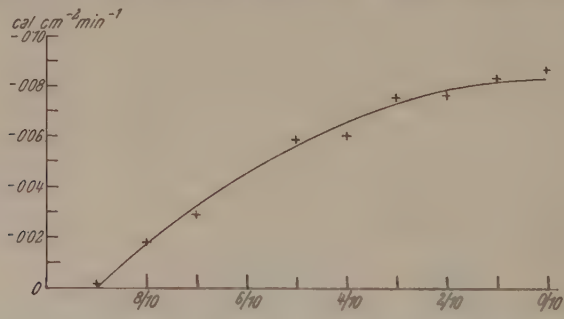


Abb. 3. Die Abhängigkeit der effektiven Ausstrahlung von der Bewölkung. Die ausgezogene Kurve ist die beste Näherungsparabel. Die Kreuze bezeichnen die Mittel der Meßwerte.

Regen geschützt werden mußte. Es wurde für jede Bewölkungsstufe eine mittlere effektive Ausstrahlung berechnet. Nach einfachen Regeln der Ausgleichsrechnung läßt sich durch diese Punkte sehr gut eine Parabel legen (Abb. 3). Die Näherungsparabel hat die Form:

$$A_i = 0{,}082\left[1 - 1{,}24\left(\frac{i}{10}\right)^2\right] \text{ cal cm}^{-2}\,\text{min}^{-1}\,. \tag{4}$$

Die von H. HOINKES und N. UNTERSTEINER [3]: im Jahr 1950 angestellten Beobachtungen liefern die Formel

$$A_i = 0{,}085\left[1 - 1{,}4\left(\frac{i}{10}\right)^2\right] \text{ cal cm}^{-2}\,\text{min}^{-1}\,. \tag{5}$$

Während des Tages sammelt sich in den feinen Rissen des Eises Schmelzwasser. Wenn die Gletscheroberfläche mehr Energie verliert als gewinnt, dann wird zuerst dieses Schmelzwasser an der Oberfläche gefrieren und dabei die Schmelzwärme freigeben. Es ist aus diesem Grunde zu

erwarten, daß die Berechnung des Temperaturverlaufes im Gletschereis von den üblichen Ansätzen abweicht. Es wäre am einfachsten, ohne den Einfluß der Schmelzwärme für die Abkühlung des Eises zu berücksichtigen, einen zeitlich konstanten Energieverlust der Oberfläche als Randbedingung anzunehmen, wobei als Anfangszustand Isothermie im Gletscher angenommen werden kann. Die Abkühlung des Eises muß dann der Wärmeleitungsgleichung

$$T_t = K T_{zz} \tag{6}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen:

$$T(0,z) = 0 \qquad T_{zz}(t,0) = \text{konstant} \tag{6a}$$

genügen. Die Lösung dieser Aufgabe lautet [2]:

$$T = R\left\{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi k c \varrho}} e^{\frac{-z^2}{4Kt}} - \frac{z}{k}\left[1 - \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)\right]\right\} \tag{7}$$

mit $$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-x^2} dx\,.$$

Darin bedeuten: ϱ die Eisdichte, c die spezifische Wärme des Eises, k die Wärmeleitungsfähigkeit des Eises und R den Energieverlust der Gletscheroberfläche pro Zeiteinheit durch Ausstrahlung. Der Einfluß der konvektiv zugeführten Wärme ist nicht berücksichtigt. Dieser Einfluß wurde von H. Reuter [8] und H. Philipps [5] berechnet und es bleibt zu diskutieren, ob das gewonnene Ergebnis für den vorliegenden Fall verwendet werden kann. Die Formel von H. Reuter lautet:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{R + \gamma c_p A}{\sqrt{k \varrho c} + c_p \sqrt{A \varrho}} \sqrt{t}\,. \tag{8}$$

Darin bedeutet: γ den Temperaturgradienten im Außenraum, c_p die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck und A den Austauschkoeffizienten. Die übrigen Größen haben die gleiche Bedeutung wie in Gleichung (7). Für A = 0 wird Formel (7) verifiziert. H. Reuter nahm als Anfangszustand im Boden Isothermie und einen konstanten Temperaturgradienten im Außenraum an. Weiter wurde eine konstant bleibende Ausstrahlung als Randbedingung angesetzt; für dieses System soll die Wärmeleitungsgleichung gelten. Diese Formel kann im vorliegenden Fall nicht zur Berechnung der Oberflächentemperatur verwendet werden, weil H. Reuter den Austauschkoeffizienten höhenkonstant voraussetzt, was auf bodennahe Schichten sicher nicht ohne weiteres übertragbar ist. Die Formel von Philipps [5] lautet:

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{R}{\sqrt{k \varrho c} + c_p \sqrt{A \varrho}} \sqrt{t}\,. \tag{9}$$

Sie bildet eine spezielle Form von Formel (8) und entspricht dem Fall, daß nicht nur im Boden, sondern auch in der Atmosphäre Isothermie als

Anfangszustand angenommen wird. Auch diese Bedingung ist in eisnahen Schichten im allgemeinen nicht erfüllt. Wenn man sich auf die Berechnung der Eistemperaturen beschränkt, ist es nicht notwendig, für den Außenraum Anfangsbedingungen anzugeben. Es genügt, den Energieverlust der Gletscheroberfläche pro Zeiteinheit zu kennen. Dieser Betrag, gebildet aus der effektiven Ausstrahlung, vermindert um die konvektiv zugeführte fühlbare und latente Wärme, ist in Formel (7) für R einzusetzen. In allen Nächten, in denen Temperaturmessungen im Eise durchgeführt wurden, konnte ein fast tiefenunabhängiger Temperaturgradient festgestellt werden. Der Einfluß der Schmelzwärme bietet dafür eine Erklärungsmöglichkeit: Für den Fall, daß der Temperaturgradient an der Oberfläche konstant vorgegeben wird und in der Tiefe h die Temperatur wegen des Gefriervorganges des Schmelzwassers vorübergehend auf Null Grad konstant bleibt, ist als Lösung der Wärmeleitungsgleichung im stationären Zustand nur ein konstantes Temperaturgefälle möglich. Allerdings ist dieses Ergebnis nicht ohne weiteres auf den Gletscher übertragbar, weil sich die Tiefe h mit der Zeit ändert. Für sehr kleine Tiefen von z ungefähr 1 cm kann jedoch angenommen werden, daß der stationäre Zustand rasch erreicht ist, so daß die Tiefe h bis zum Erreichen des stationären Zustandes konstant angenommen werden kann. Bei weiterer Abkühlung verschiebt sich h etwas tiefer, doch kann auf Grund einer Abschätzung angegeben werden, daß sich die lineare Temperaturverteilung nur wenig ändert. Der Energieverlust, der an der Oberfläche durch effektive Ausstrahlung eintritt, kann nämlich zum größten Teil durch Schmelzwärme gedeckt werden. Es kühlt sich daher das Eis nur unwesentlich ab. Frei werdende Schmelzwärme und resultierende Abkühlung des Eises in einer Schicht dz stehen unter den gemessenen Bedingungen in folgendem Verhältnis zueinander:

$$\text{Schmelzwärme} : \text{Abkühlung} = dz\ 2{,}1 : dz \cdot z \cdot 0{,}088.$$

In 10 cm Tiefe trägt die Schmelzwärme noch immer etwa 70% zur Deckung des Energieverlustes bei. Zu einer Abschätzung, wieviel Schmelzwasser in der Volumeneinheit des Gletschereises anzunehmen ist, kommt man durch folgende Überlegung. Aus dem Gletscher fließt ein Wärmestrom

$$Q = k \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{z=o} \cdot t\ ,$$

wo k die Wärmeleitfähigkeit des Eises und t die Zeit bedeutet. Im trockenen Boden, wo kein Einfluß der Schmelzwärme anzunehmen ist, muß der Betrag Q in jedem Augenblick gleich groß sein wie

$$F = \varrho \cdot c \int_0^\infty T(z)\, dz \cdot$$

Ist nun Q größer als F, so ist mehr Wärme aus dem Gletscher geflossen. Der Differenzbetrag stammt von der freigewordenen Schmelzwärme. Setzt man vernünftige Meßwerte voraus ($F = 10$ cal cm^{-2}, Temperaturgradient 0,2° cm^{-1}, 12stündige Abkühlungszeit, Minimum der Oberflächentemperatur —3° C und Wärmeleitfähigkeit des Eises 17 cal gd^{-1}

$cm^{-1} h^{-1}$), dann ergibt sich für die freigewordene Schmelzwärme $S = 31$ cal cm^{-2}. Verteilt man diesen Energiebetrag gleichmäßig auf alle gefrorenen Schichten (bis etwa 15 cm Tiefe), dann werden während einer Nacht 2,1 cal cm^{-3} frei. Um diesen Betrag durch Schmelzwärme zu decken, müßte man in der Volumeneinheit des Gletschereises 0,026 Gramm Wasser annehmen. Es sei hier betont, daß der eben errechnete Wert nur zeigen soll, daß schon geringe Wassermengen genügen, um den Wärmehaushalt zu beeinflussen, weil die Schmelzwärme des Eises im Vergleich zum Gesamtumsatz an Energie während einer Nacht groß ist. W. Schüepp [*11*] gibt nach Messungen auf der Davoser Eisbahn an, daß schmelzendes Eis bereits 10—20% Wasser enthalten kann; doch muß dieser Wert nicht unbedingt für den Gletscher gültig sein.

Die Verzögerung der Abkühlung durch die freiwerdende Schmelzwärme gestaltet eine mathematische Behandlung schwierig, da die Schmelzwärme eine stetig und wahrscheinlich ungleich schnell wandernde Wärmequelle darstellt. Es kann keineswegs erwartet werden, daß sich die berechnete Abkühlung ohne Berücksichtigung der Schmelzwärme mit den Meßwerten deckt.

II. Der nächtliche Wärmeumsatz der gefrorenen Gletscheroberfläche.

Die Komponenten des nächtlichen Wärmeumsatzes der gefrorenen Gletscheroberfläche können in folgender Gleichung zusammengefaßt werden:

$$- \text{Strahlung} + \text{fühlbarer Wärmestrom} \pm \text{latenter Wärmestrom} + + \text{Schmelzwärme} = - \text{Abkühlung des Eises.}$$

Vorgänge, die dem Gletscher Wärme entziehen, sind mit negativem Vorzeichen versehen. Die *Strahlungskomponente* ist eine Differenzgröße aus der Temperaturstrahlung des Eises und der Gegenstrahlung der Atmosphäre. Dem nächtlichen Wärmeumsatz fehlt die kurzwellige Einstrahlung; der Energieverlust in Frostnächten durch langwellige Ausstrahlung ist im allgemeinen um eine Zehnerpotenz kleiner als der Energiegewinn des Gletschers durch Einstrahlung bei Tag. Die Messungen wurden mit dem ventilierten Strahlungsbilanzmesser von F. Sauberer [*10*] durchgeführt, den auch H. Hoinkes und N. Untersteiner [*3*, *4*] verwendeten. Wenn die potentielle Temperatur der eisnahen Luftschicht mit der Höhe zunimmt, fließt nach abwärts ein *fühlbarer Wärmestrom*, der durch turbulente Vermischung (dynamische Konvektion) aufrecht erhalten wird. Da in der untersten, der Gletscheroberfläche unmittelbar aufliegenden Luftschicht (theoretisch geforderte laminare Grenzschicht) erfahrungsgemäß kein Wärmestau zu beobachten ist, muß angenommen werden, daß der Wärmestrom durch diese Grenzschicht hindurch (vermutlich durch molekulare Wärmeleitung) auf die Gletscheroberfläche übergeht. Der durch Scheinleitung aufrecht erhaltene Wärmestrom wird keine grundsätzlichen Unterschiede zwischen Tag und Nacht aufweisen, da er im wesentlichen von den Gradienten der Windgeschwindigkeit und der potentiellen Temperatur über der Gletscheroberfläche

abhängt. Der Fluß *latenter Wärme* (Sublimation und Kondensation an der Gletscheroberfläche) kann bei Kenntnis des Dampfdruckgradienten und des Austauschkoeffizienten abgeschätzt werden. Es ist anzunehmen, daß der Feuchtigkeitsstrom längs eines Dampfdruckgradienten über dem Gletscher durch den Vorgang der Diffusion von einer mit Wasserdampf nahezu gesättigten Grenzschicht an der Gletscheroberfläche geliefert bzw. aufgenommen wird. Aus Stetigkeitsgründen kann längs des Dampfdruckgradienten nicht mehr Wasserdampf fließen, als durch eine gedachte quasilaminare Grenzschicht unmittelbar an der Gletscheroberfläche geliefert wird. Tagsüber füllen sich feine Risse und Hohlräume des Eises mit Schmelzwasser, das beim Frieren die *Schmelzwärme* freigibt. Es ist wesentlich, daß sie nicht als eigene Komponente in die Gleichung des Wärmehaushaltes eingeht, sondern im Wärmestrom, der aus dem Gletscherinneren fließt, enthalten ist. Der Gletscher gefriert, an der Oberfläche beginnend, langsam tiefer und die Schmelzwärme wird in jener Tiefe frei, in der die Temperatur gerade Null Grad C beträgt. Die freigewordene Schmelzwärme kann durch den Prozeß der Wärmeleitung der Oberfläche zur Verfügung gestellt werden. Somit muß für den Wärmestrom folgende Gleichung gelten:

$$k\left(\frac{\partial T}{\partial Z}\right)_{z=0} t = \varrho c \int_0^\infty T(z)\, dz + S\,, \tag{10}$$

wo k die Wärmeleitfähigkeit des Eises und S die in der Zeit t freigewordene Schmelzwärme bedeutet. Aus Gleichung (10) kann S ermittelt werden. Eine Abschätzung hat in einem Kubikzentimeter Gletschereis nach einem ablationsreichen Tag etwa 0,026 Gramm Wasser, äquivalent 2,1 cal, ergeben. Die Eistemperaturen wurden zur Ermittelung der Abkühlung und der Schmelzwärme direkt gemessen; die anderen Komponenten (Strahlung, fühlbarer und latenter Wärmestrom) wurden nach den Methoden von H. HOINKES und N. UNTERSTEINER [*3*, *4*] berechnet. Auf Einzelheiten wird hier nicht eingegangen, es muß der Hinweis auf diese Arbeiten genügen.

Die Thermo-Hygrographen waren in 10 cm und 130 cm Höhe über der Gletscheroberfläche aufgestellt. Die Werte des latenten und des fühlbaren Wärmestromes beziehen sich auf 70 cm Höhe. Der Austauschkoeffizient wurde nach den Formeln von H. U. SVERDRUP und H. LETTAU berechnet. Die Unterschiede zwischen den Berechnungen nach beiden Formeln sind im allgemeinen gering, es wurde das arithmetische Mittel aus beiden Werten genommen. In den vorliegenden Berechnungen wurde für den Austausch von Wärme und Wasserdampf der Impulsaustausch gesetzt. Es ist noch nicht sicher bekannt, ob diese Gleichsetzung vorgenommen werden darf. Die Angaben über die Wärmeleitfähigkeit von Eis streuen. Der verwendete Wert 17 cal cm^{-1} h^{-1} gd^{-1} wurde durch Extrapolation der Wärmeleitfähigkeit von Schnee auf die Dichte des Eises (etwa 0,9 Gramm pro Kubikzentimeter) erhalten [*1*]. Die obersten 10—15 cm des Eises sind allerdings meist porös und zerfressen, genaue Messungen der Dichte

Tabelle 3. *Berechnung der Wärmebilanz in Frostnächten, 18 bis 06 Uhr (cal cm^{-2}) Vernagtferner, 2965 m, Juli 1952.*

	26./27. 7.	29./30. 7.	30./31. 7.
effektive Ausstrahlung	—42	—50	—47
fühlbarer Wärmestrom	15	18	18
latenter Wärmestrom	1	0	— 3
Schmelzwärme	11	20	18
Abkühlung berechnet	—15	—12	—14
Abkühlung gemessen	—11	— 9	—11

dieser Eisschicht liegen nicht vor. Tabelle 3 zeigt als Ergebnis der Berechnung die Wärmebilanz für die Frostnächte 26./27. 7., 29./30. 7. und 30./31. 7. 1952, jeweils für den 12stündigen Zeitabschnitt 18 bis 6 Uhr. Es ist bemerkenswert, daß der Betrag der freiwerdenden Schmelzwärme von der gleichen Größenordnung ist, wie die konvektiv zugeführte fühlbare Wärme. Berechneter und gemessener Energieverlust stimmen erträglich überein. Zur Kontrolle wurden noch die Wärmebilanzen in 3 Nächten ohne Frost (27./28. 7., 31. 7./1. 8. und 2./3. 8. 1952) berechnet (Tab. 4).

Tabelle 4. *Berechnung der Wärmebilanz in Nächten ohne Frost, 18 bis 06 Uhr (cal cm^{-2}), Vernagtferner, 2965 m, Juli/August 1952*

	27./28. 7.	31.7./1. 8.	2./3. 8.
effektive Ausstrahlung	—34	—15	—31
fühlbarer Wärmestrom	24	11	23
latenter Wärmestrom	13	4	— 6
Schmelzwärme	0	8	14
Niederschlag	2	1	3
Abkühlung	0	0	— 2
Ablation berechnet, mm Wasser	0,6	1,1	0,6
Ablation gemessen, mm Wasser	1,3	1,2	0,9

Die letzte Nacht ist besonders interessant als Beispiel für eine positive Gesamtwärmebilanz und zugleich zeitweise gefrorene Gletscheroberfläche. Die Ablation vollzog sich in den späten Abendstunden (1. Zeitabschnitt mit positiver Wärmebilanz). Dann bewirkte eine vermehrte effektive Ausstrahlung die beginnende Abkühlung des Eises (1. Zeitabschnitt mit negativer Wärmebilanz). Dichte Bewölkung nach Mitternacht verhinderte einen weiteren Energieverlust durch Ausstrahlung, so daß die konvektiv zugeführte Wärme imstande war, die Abkühlung des Eises rückgängig zu machen (2. Zeitabschnitt mit positiver Wärmebilanz). Dadurch wechselte der Temperaturgradient an der Oberfläche das Vorzeichen. In den frühen Morgenstunden konnte durch Zunahme der effektiven Ausstrahlung erneut eine geringe Abkühlung eintreten (2. Zeitabschnitt mit negativer Wärmebilanz). Im ganzen gesehen überwiegt in dieser Nacht der Betrag der positiven Bilanz. In dem Umstand, daß die gemessenen Abkühlungsbeträge (Ablationsbeträge) kleiner (größer) sind als die berechneten, könnte ein Hinweis dafür erblickt werden, daß der Austauschkoeffizient für Wärme etwas größer ist als der für Impuls (um ungefähr 20%).

III. Die Temperaturänderung des Gletschereises bei beginnender kurzwelliger Einstrahlung.

Bei Sonnenaufgang ist nach Frostnächten eine bestimmte Temperaturverteilung im Gletscher vorgegeben, die sich mit beginnender kurzwelliger Einstrahlung ändert. Die in der Zeiteinheit vom Eis absorbierte Energie kann in den ersten Morgenstunden bei wolkenlosem Himmel angenähert werden durch den Ausdruck:

$$i = 9 \cdot t + 20 \text{ cal cm}^{-2} h^{-1}. \tag{11}$$

Die numerischen Werte wurden aus Registrierungen eines Aktinographen gewonnen. Zur Zeit des Sonnenaufganges ist $t = 0$. Es wurde für reines Gletschereis eine Albedo von 0,35 angenommen.

Mit Hilfe der Wärmeleitungsgleichung soll untersucht werden, wann der Beginn des Schmelzprozesses zu erwarten ist. Beobachtungen des Eises zeigten, daß bei wolkenlosem Himmel erst ungefähr eine Stunde nach Sonnenaufgang die Abkühlung der Oberfläche von etwa -3° C kompensiert war und das Eis zu schmelzen begann. Diese Verzögerung ist nicht zu erklären, wenn man annimmt, daß die gesamte eingestrahlte kurzwellige Energie an der Oberfläche umgesetzt wird: das Eis müßte in diesem Fall nach etwa 10 Minuten zu schmelzen beginnen. Es erhebt sich die Frage, ob es durch Einführung eines endlichen Absorptionskoeffizienten gelingt, den verzögerten Beginn des Schmelzvorganges zu erklären.

Folgendes Wärmeleitungsproblem soll gelöst werden:

$$T_t = K T_{zz} + \frac{i_0 a e^{-az}}{\varrho c} + \frac{i t a e^{-az}}{\varrho c} \tag{12}$$

mit folgenden Anfangs- und Randbedingungen:

$$T_z(0,t) = \frac{EV}{k} = m; \qquad T(z,0) = -T_0 + mz. \tag{12a,b}$$

Darin bedeutet: a den Absorptionskoeffizienten, c die spez. Wärme, ϱ die Dichte, K die Temperaturleitfähigkeit, k die Wärmeleitfähigkeit. Diese Konstanten gelten für Eis. Weiter bedeutet: z die Tiefe im Gletscher, t die Zeit, i die Intensität, EV die langwellige Strahlungsbilanz, T_0 die Oberflächentemperatur bei Sonnenaufgang und $T(z, t)$ die gesuchte Temperatur. Der Ansatz ist nicht korrekt, weil dabei angenommen wird, daß die langwelligen Strahlungsströme Tag und Nacht bei gleicher Bewölkung gleich groß sind und bei Sonnenaufgang zusätzlich nur kurzwellige Strahlung einfällt, für die ein einheitlicher Absorptionskoeffizient gilt. Korrekt wäre es, jede einfallende Wellenlänge mit einem eigenen Absorptionskoeffizienten einzuführen. Die Lösung des Problems soll in folgenden Schritten gewonnen werden:

a) Lösung für konstant bleibende kurzwellige Einstrahlung $L_1(z,t)$,
b) Lösung für linear zunehmende kurzwellige Einstrahlung $L_2(z,t)$,
c) Die vollständige Lösung $T(z,t)$ setzt sich wie folgt zusammen:

$$T(z,t) = L_1(z,t) + L_2(z,t) - T_0 + mz. \tag{13}$$

Um die Bedingungen (12a, b) zu erfüllen, muß für L_1 und L_2 gefordert werden:

$$\left(\frac{\partial L_1}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad L_1(z,0) = 0 \tag{13a}$$

$$\left(\frac{\partial L_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad L_2(z,0) = 0\,. \tag{13b}$$

Für den Fall konstanter Einstrahlung hat H. Reuter [7] die Lösung des Problems angegeben. Sie hat die Form:

$$L_1(z,t) = F(a,z,t) + G(z,t)\,. \tag{14}$$

Darin bedeutet:

$$F(a,z,t) = \frac{i}{2ka}\left\{e^{Ka^2t-az}\left[1-\Phi\left(a\sqrt{Kt}-\frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\,e^{Ka^2t+az}\left[1-\Phi\left(a\sqrt{Kt}+\frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)\right]-2e^{-az}\right\} \tag{15}$$

$$G(z,t) = i\left\{\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}\,k\varrho c}\,e^{\frac{-z^2}{4Kt}} - \frac{z}{k}\left[1-\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)\right]\right\} \tag{16}$$

mit $$\Phi(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi} e^{-x^2}\,dx\,.$$

F ist ein partielles Integral und G eine homogene Lösung. G beschreibt die Temperaturänderung für den Fall, daß die gesamte Energie an der Oberfläche absorbiert wird.

Die Lösung der Differentialgleichung für *linear zunehmende Einstrahlung* wird gesucht:

$$\frac{\partial L_2}{\partial t} = K\frac{\partial^2 L_2}{\partial z^2} + \frac{ait}{\varrho c}\,e^{-az} \tag{17}$$

mit folgenden Anfangs- und Randbedingungen:

$$L_2(z,0) = 0; \qquad \left(\frac{\partial L_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \tag{17a, b}$$

Dazu wird Gleichung (17) nach der Zeit differenziert und folgende Substitution eingeführt:

$$\frac{\partial L_2(z,t)}{\partial t} = v(z,t)\,. \tag{18}$$

Damit geht Gleichung (17) über in:

$$v_t = Kv_{zz} + \frac{aie^{-az}}{\varrho c}\,. \tag{19}$$

Für die substituierte Gleichung gelten nun im allgemeinen nicht mehr dieselben Anfangs- und Randbedingungen. Es müssen auch diese der Substitution unterworfen werden.

Die Lösung von (19) mit den Bedingungen (17a, b) ist bekannt und identisch mit Gleichung (14). L_2 gewinnt man durch Integration:

$$L_2(z,t) = \int v(z,t)\,dt \quad \text{oder} \quad L_2(z,t) = \int [F(a,z,t) + G(z,t)]\,dt\,.$$

F und G sind durch Gleichung (15, 16) angegeben. Die Integrationskonstante kann durch die Anfangsbedingung festgelegt werden.

Zur Berechnung der Oberflächentemperatur ist in der Lösung

$$T(z,t) = F(a,z,t) + G(z,t) + \int [F(a,z,t) + G(z,t)]\, dt + mz - T_0$$

$z = 0$ zu setzen. Für diesen Fall kann das Integral geschlossen angegeben werden; es ergibt sich dafür:

$$L_2(0,t) = \frac{i}{ka}\left\{\frac{e^{Ka^2t}}{Ka^2}\left[1 - \Phi\sqrt{Ka^2t}\right] + \frac{2}{Ka^2\sqrt{\pi}}t - t\right\} + \frac{2\,i\,t^{3/2}}{\sqrt{\pi k \varrho c}} \cdot \frac{2}{3} + C$$

Die Integrationskonstante ist durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Zur numerischen Auswertung wurden für die Konstanten folgende Werte eingesetzt: $c = 0{,}5\,\mathrm{cal\,g^{-1}\,gd^{-1}}$, $\varrho = 0{,}9\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$, $a = 0{,}15\,\mathrm{cm^{-1}}$ und $k = 18\,\mathrm{cal\,gd^{-1}\,cm^{-1}\,h^{-1}}$. Der oben angeführte Absorptionskoeffizient entspricht dem von Altschnee. Messungen des Absorptionskoeffizienten von Gletschereis liegen meines Wissens nicht vor. Der von S. Polli [6] gefundene Absorptionskoeffizient $a = 0{,}0125\,\mathrm{cm^{-1}}$ ist sicher zu klein. W. Schüepp [11] gibt für Eis nach Messungen auf der Davoser Eisbahn einen Absorptionskoeffizient, der mit $0{,}9\,\mathrm{cm^{-1}}$ für Gletschereis wahrscheinlich zu hoch ist. H. Hoinkes [12] konnte beobachten, daß die kurzwellige Strahlung hauptsächlich in den obersten 15 cm des Eises absorbiert wird. Mit dem in die Rechnung eingeführten Absorptionskoeffizienten ($a = 0{,}15\,\mathrm{cm^{-1}}$) ist bis zu 15 cm Tiefe 90% der Strahlung absorbiert worden. Abb. 4 zeigt

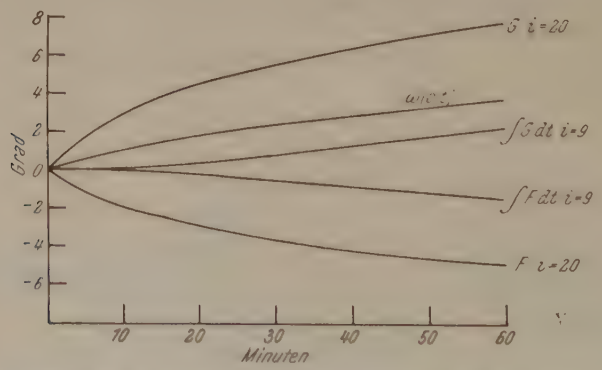


Abb. 4. Die Lösungen der diskutierten Wärmeleitungsgleichung für die Gletscheroberfläche. Die Kurve $w\,(0, t)$ gibt die Temperaturerhöhung der Gletscheroberfläche.

die berechnete zeitliche Temperaturveränderung $w\,(0, t)$. Sie enthält 4 Funktionen, die zur Temperaturänderung der Oberfläche beitragen. Die Summe der Funktionswerte gibt die Temperaturänderung der Oberfläche $w\,(0, t)$. Es zeigt sich, daß nach etwa 45 Minuten die Oberflächentemperatur um 3° gestiegen ist. Es kann also nach klaren Nächten (Oberflächentemperatur -2^0 bis -4°C) das Eis erst nach einer halben bis einer Stunde zu schmelzen beginnen. Dieses Ergebnis deckt sich einigermaßen mit den Beobachtungen.

Um die Temperaturänderung des Eises zu finden, wenn die Einstrahlung eine gegebene Funktion der Zeit ist, soll die Wärmeleitungsgleichung in folgender Form gelöst werden:

$$T_t = K T_{zz} + h(t)\, e^{-az} \tag{20}$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen:

$$T(z, 0) = 0; \quad T_z(0, t) = 0 ;$$

dabei wurden die Bezeichnungen von Gleichung (12) übernommen. H. Reuter [9] hat diese Aufgabe für den Fall gelöst, daß sich die Einstrahlungsintensität nach einer Sinusfunktion ändert. Um die Lösung dieses etwas allgemeiner formulierten Problems zu gewinnen, wird folgender Ansatz vorgeschlagen:

$$T(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z) \cdot q_n(t) ; \tag{21}$$

man setzt diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und erhält:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(q'_n(t)\, p_n(z) - K\, q_n(t)\, p_n''(z) \right) = h(t)\, e^{-az} ; \tag{22}$$

mit dem weiteren Ansatz $p_n'' = -\lambda_n p_n$ ergibt sich ein Eigenwertproblem, zu dessen Lösung die Bedingung $p_n(d) = 0$ eingeführt wird, wo d die Gletscherdicke bedeutet. Daraus geht hervor, daß am Gletscherboden kein Temperaturgefälle vorhanden ist. Diese Voraussetzung ist sicher erfüllt, weil auch während sehr kalter Nächte die Abkühlung nur bis etwa 20 cm Tiefe dringt und in tieferen Schichten Isothermie erwartet werden kann. Die Lösung für p_n lautet:

$$p_n(z) = \cos \lambda_n z \tag{23}$$

mit $$\lambda_n = \frac{n\pi}{d} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Da diese Funktion eine Orthogonalitätsbedingung erfüllt, ergibt sich für q_n eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung:

$$q'_n + \lambda_n K\, q_n = \frac{2}{d} \int_0^d h(t)\, e^{-az}\, p_n(z)\, dz . \tag{24}$$

Die rechte Seite der Gleichung (24) hängt nur mehr von der Zeit ab und kann mit $H_n(t)$ bezeichnet werden. Für q_n ergibt sich als Lösung

$$q_n = e^{-\lambda_n K t} \left\{ \int H_n(t)\, e^{\lambda_n K t}\, dt + c \right\} . \tag{25}$$

Die Konstante c wird durch die Anfangsbedingung festgelegt. Die Funktionen $p_n(z)$ und $q_n(t)$ können nun in

$$T(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(z)\, q_n(t)$$

eingesetzt werden. Der Erfolg einer numerischen Auswertung hängt von der Konvergenz der Reihe und somit von der Spezialisierung der Funktion $H_n(t)$ ab.

Literatur.

1. BRACHT, J.: Über die Wärmeleitfähigkeit des Erdbodens und des Schnees und den Wärmeumsatz im Erdboden. Veröff. d. geoph. Inst. d. Univ. Leipzig, 2. Serie **14**, 147 (1949).
2. BRUNT, D.: Physical and Dynamical Meteorology. Cambridge, 1944.
3. HOINKES, H. und UNTERSTEINER, N.: Wärmeumsatz und Ablation auf Alpengletschern I. Geograf. Ann. **34**, 99 (1952).
4. HOINKES, H.: Wärmeumsatz und Ablation auf Alpengletschern II. Geograf. Ann. **35**, 116 (1953).
5. PHILIPPS, H.: Zur Theorie der Wärmestrahlung in Bodennähe. Gerl. Beitr. **56**, 229 (1940).
6. POLLI, S.: Penetrazione delle radiazioni luminose nel ghiaccio e nella neve. Annali di Geofisica **3**, 371 (1950).
7. REUTER, H.: Zur Theorie des Wärmehaushaltes strahlungsdurchlässiger Medien. Tellus, **1**, no. 3, 6 (1949).
8. REUTER, H.: Zur Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht und Ausbildung der Bodeninversion. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., Abt. IIa, **155**, 333 (1949).
9. REUTER, H.: Über die Theorie des Wärmehaushaltes einer Schneedecke. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **1**, 62 (1948).
10. SAUBERER, F. und DIRMHIRN I.: Der Strahlungshaushalt horizontaler Gletscheroberflächen auf dem Hohen Sonnblick. Geograf. Ann. **34**, 261 (1952).
11. SCHÜEPP, W.: Über den Wärmeaustausch im Eisfeld. Verh. Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft, St. Gallen, 1948, 125.
12. Noch nicht veröffentlicht.

551.508.94

Zur Messung des luftelektrischen Potentialgefälles mittels Kollektoren.

Von

Richard Wagner, Giessen.

Mit 18 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Zur Messung des luftelektrischen Potentialgefälles werden hauptsächlich radioaktive Kollektoren und in geringem Maße auch Tropfkollektoren verwendet. Diese beiden Kollektortypen, die sich in ihrer Wirkungsweise prinzipiell unterscheiden, werden im 1. Teil der Arbeit einander gegenübergestellt. Die theoretische Untersuchung des Tropfkollektors ergibt sich als Problem der Elektrostatik. Dagegen sind die charakteristischen Eigenschaften des radioaktiven Kollektors, wie seine Abhängigkeit von Belüftung und Belastung, zurückzuführen auf das Verhalten der Ionenwolke, die sich in der Umgebung des Kollektors aufbaut. Demnach erfordert eine Theorie des radioaktiven Kollektors die Untersuchung von Ionenströmungen in elektrischen Feldern.

Die unipolare, kugelsymmetrische Strömung in einem Kugelkondensator bildet den 2. Teil der Arbeit, wo die 1. Näherung der Lösung des Problems dargestellt ist; es werden Verlauf von Feldstärke, Raumladungsdichte und Potentialfunktion gegeben und diskutiert. Für ein radioaktives Präparat wird in einem Kugelkondensator die Abhängigkeit des Stroms von der anliegenden Spannung experimentell aufgenommen. Der „Anlaufstrom" dieser Stromspannungskurve läßt sich durch eine Funktion beschreiben, in welche die allgemeine Potentialfunktion übergeht, wenn die Werte für den Strom klein gehalten werden. Formal werden schließlich noch Begriffe eingeführt, die aus der Technik der Elektronenröhren geläufig sind. Der Schritt von einer radial verlaufenden unipolaren Strömung im kugelsymmetrischen Feld zum radioaktiven Kollektor im homogenen Feld erfordert eine theoretische Untersuchung des Verhaltens zweier Ionenströmungen, die von einer Doppelquelle in ein homogenes Feld strömen und deren Ionen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Diese Untersuchung wird qualitativ im 3. Teil durchgeführt und ergibt, daß der radioaktive Kollektor nicht hoch belastet werden darf, da sein „Übergangswiderstand" von der zu messenden Spannung abhängt.

Summary. In order to measure the atmospheric potentialgradient we are using in most cases radioactive collectors and to a smaller degree water-dropper-collectors. The first part of this paper compares these two types of collectors and shows that in principle they differ in their functions. The theory of the water-dropper-collector seems to be an electrostatic problem. The characteristic qualities of the radioactive collector, for instance, its dependence on ventilation and charge, can be ex-

plained by the conditions of the ion-cloud which is formed around the collector. Thus, a theory of the radioactive collector can only be given if we examine ion-currents in electric fields.

The second part of this paper deals with the unipolar current of spherical symmetry within a spherical condenser and gives the first approximation for the solution of this problem. The course of field strength, of density of free electric charge, and of potential-function are examined and discussed. In a spherical condenser the characteristic of the current as a function of tension is determined by experiments for a radioactive substance. The first part of the curve which describes the start of this characteristic can be expressed by a function which is the limit of the general potential-function, if we use very small currents. Here, some definitions are formally given which are already used in the technique of electronic tubes. If we want to proceed from a unipolar current, taking a radial course in a spherical field, to a radioactive collector within a homogeneous field, we have to examine the conditions of two ion-currents which have opposite signs and start their course from a double source into an homogeneous field. This examination is qualitatively done in the third part and results in proving that the radioactive collector should not be too highly charged, as its resistance of transition depends on the tension which has to be measured.

Résumé. Pour mesurer le gradient du potentiel électrique on emploie principalement des collecteurs radio-actifs et quelquefois aussi des collecteurs à écoulement d'eau. Ces deux types de collecteurs, qui, par principe, se distinguent par leur fonctionnement, sont comparés l'un avec l'autre dans la première partie de l'article. L'examen théorique du collecteur à écoulement d'eau se présente comme étant un problème électrostatique. En revanche les caracteristiques du collecteur radio-actif, sa dépendence de la ventilation et de la charge par exemple, sont dues au comportement de la nuée ionique, qui se forme autour du collecteur. Une théorie du collecteur radio-actif exige donc l'examen des courants ioniques dans des champs électriques.

Le courant unipolaire, en symétrie sphérique, dans un condensateur sphérique, est décrit dans la seconde partie de l'article, qui nous donne la première approximation de la solution du problème. La structure de l'intensité du champ électrique, de la densité des charges libres et de la fonction potentielle sont décrites et discutées. Puis on mesure une préparation radio-active dans un condensateur sphérique et on étudie de quelle manière le courant dépend de la tension appliquée. Le début de la caractéristique, qui décrit cette dépendance, peut être représentée par une fonction, dans laquelle passe la fonction potentielle générale, si la valeur du courant est maintenue petite. Enfin des définitions sont introduits qui, par la technique des tubes électroniques, sont déjà connues. Si l'on veut passer d'un courant unipolaire, qui suit un cours radial au collecteur radio-actif dans un champ homogène, il faut examiner théoriquement les conditions de deux courants ioniques, qui partent d'une source double dans un champ homogène et dont les ions ont des signes contraires. Cet examen est poursuivi dans la troisième partie et montre qu'il n'est pas recommandable de charger le collecteur radio-actif très fortement, parce que sa résistence de transition dépend de la tension, qu'on veut mesurer.

Die beiden wichtigsten Kollektortypen sind der *Tropfkollektor* und der *radioaktive Kollektor*. Da ihre Anwendung zwei verschiedenen Prinzipien entspricht, sollen diese beiden Prinzipien mit ihrer Anwendung getrennt dargestellt werden.

Weiteres über die verschiedenen Kollektortypen siehe bei [*1*], [*3*], [*4*], [*5*], [*6*].

A. Der Tropfkollektor.

1. Grundlagen.

Der Tropfkollektor läßt sich als geladene leitende Kugel in einem homogenen elektrischen Fremdfeld darstellen.

Wir trennen seine Untersuchung in zwei Spezialfälle auf:

a) Leitende ungeladene Kugel in einem homogenen elektrischen Fremdfeld.

b) Leitende Kugel mit einer vorgegebenen Oberflächenladung im Raum ohne Fremdfeld.

Diese Spezialfälle behandeln wir einzeln und überlagern sie danach zu unserem zu untersuchenden Fall.

a) Leitende, ungeladene Kugel im homogenen Feld.

Das homogene Außenfeld erregt auf der ungeladenen Kugel[1] eine Influenzladung.

Wir führen Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein und setzen, da Rotationssymmetrie herrscht, $\varphi = \text{const} = 0$.

Der Betrag der Feldstärke des homogenen Außenfeldes sei $|\mathfrak{E}_0| = E_0$.

Den Koordinatenursprung legen wir in den Mittelpunkt der leitenden, ungeladenen Kugel. Der Radius der Kugel sei a.

Die Potentialfunktion des homogenen Außenfeldes ist:

$$\Phi_0 = -E_0 x = -E_0 r \cos\vartheta. \tag{1}$$

Durch die Influenzladungen, die durch das Außenfeld auf der Kugel erregt werden, entsteht eine zusätzliche Potentialfunktion Φ_1, welche die folgenden Bedingungen erfüllen muß:

Die Randbedingungen:

1. Die Gesamtpotentialfunktion $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$ muß mit beliebig groß werdendem r in die Potentialfunktion des homogenen Feldes übergehen, d. h. es muß Φ_1 mit unendlich werdendem r verschwinden, also $\lim_{r \to \infty} \Phi_1 = 0$.

2. Auf der Kugeloberfläche muß die Gesamtpotentialfunktion einen konstanten Wert annehmen:

$$\Phi_0(a) + \Phi_1(a) = \text{const}. \tag{2}$$

Außerdem muß außerhalb der Kugel die Laplacesche Gleichung erfüllt sein:

$$\Delta\,\Phi = \Delta\,\Phi_0 + \Delta\,\Phi_1 = 0. \tag{3}$$

Die einzige, diese Bedingung erfüllende Potentialfunktion ist:

$$\Phi_1(r, \vartheta) = E_0\, a^3/r^2 \cos\vartheta. \tag{4}$$

Damit ergibt sich als Gesamtpotential:

$$\Phi = -E_0 \cos\vartheta\ (r - a^3/r^2). \tag{5}$$

[1] Die Kugelform nehmen wir lediglich zur Vereinfachung der Darstellung an, grundsätzlich gelten ähnliche Überlegungen für jeden Körper mit beliebiger Gestalt.

Mit $r \to \infty$ ist bei $\Phi = -E_0 \cos\vartheta\,(r - a^3/r^2)$ das zweite Glied der Klammer gegen das erste zu vernachlässigen. Es wird also

$$\lim_{r\to\infty} \Phi = -E_0 r \cos\vartheta = \Phi_0.$$

Damit ist die erste Randbedingung erfüllt.

Für $r = a$ wird $\varphi = 0 = \text{const}$, die zweite Randbedingung ist erfüllt.

In einer einfachen Zwischenrechnung läßt sich zeigen, daß die LAPLACEsche Gleichung, und damit die dritte Bedingung erfüllt ist.

Nach der zweiten Randbedingung ist auf der Kugeloberfläche die Potentialfunktion konstant und gleich Null; außerdem wird $\Phi = 0$ für $\vartheta = \pi/2$, d. h. längs der Ebene, die durch den Kugelmittelpunkt geht und auf der Richtung des Außenfeldes senkrecht steht. Mit anderen Worten: Die Kugel nimmt das Potential der Äquipotentialfläche $\vartheta = \pi/2$ an.

Für die Ladungsdichte längs der Kugeloberfläche gilt:

$$\sigma_1 = -\varepsilon_0 (\partial\,\Phi/\partial\,r)_{r=a} = \varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta\,(1 + 2a^3/r^3)_{r=a} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta. \quad (6)$$

Wir haben demnach auf einer Kugelhalbfläche, wo $0 < \vartheta < \pi/2$ bzw. $3/2\pi < \vartheta < 2\pi$ nur positive Ladungen, während sich auf der andern Kugelhalbfläche, wo $\pi/2 < \vartheta < 3/2\pi$, nur negative Ladungen befinden.

In Abb. 1a ist die Dicke des auf der Kugeloberfläche sitzenden Wulstes als Maß für den Betrag der Oberflächenladungsdichte anzusehen.

b) Feld einer geladenen Kugel im feldfreien Raum.

Die Kugel mit dem Radius a habe eine Gesamtoberflächenladung Q, deren Vorzeichen z. B. negativ sei.

Die Oberflächenladungsdichte ist damit

$$\sigma_2 = Q/4\pi a^2. \quad (7)$$

Die Potentialfunktion dieser Oberflächenladung ist

$$\Phi_2 = Q/4\pi\varepsilon_0 r. \quad (8)$$

Wir haben um die Kugel ein kugelsymmetrisches Feld mit der Feldstärke:

$$E(r) = Q/4\pi\varepsilon_0 r^2. \quad (9)$$

Die Abb. 1b gibt wieder ein Maß für die Oberflächenladungsdichte auf der Kugel.

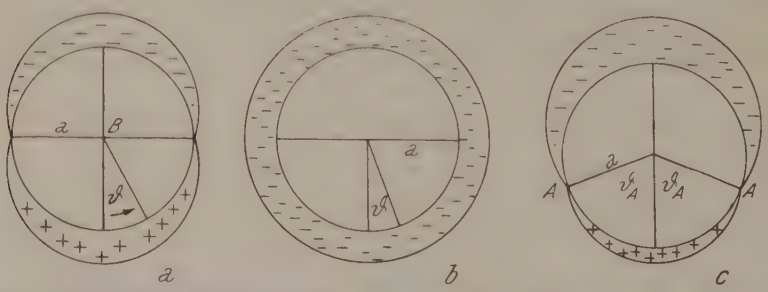


Abb. 1. Oberflächenladungsdichte. *a*) Auf einer leitenden Kugel im homogenen Feld influenziert. *b*) Auf einer geladenen Kugel ohne Außenfeld. *c*) Auf einer geladenen Kugel im homogenen Feld.

c) Überlagerung von a) und b): Geladene, leitende Kugel im homogenen Feld.

Die Potentialfunktionen, die Feldstärken und die Ladungsdichten der Fälle a) und b) superponieren sich ungestört. Wir bekommen die Gesamtpotentialfunktion

$$\Phi = -E_0 (r - a^3/r^2) \cos \vartheta + Q/4\pi\varepsilon_0 r. \tag{10}$$

Φ muß den gleichen Bedingungen genügen wie in den Fällen a) und b):

1. Es muß Φ mit beliebig groß werdendem r in die Potentialfunktion des Außenfeldes übergehen, also $\lim_{r \to \infty} \Phi = -E_0 r \cos \vartheta$. Dies ist nach (10) erfüllt.
2. Längs der Kugeloberfläche muß Φ konstant sein.
3. Φ muß die Laplacesche Gleichung erfüllen: $\Delta \Phi = 0$.

Die dritte Bedingung ist erfüllt, da die einzelnen Potentialfunktionen sie erfüllen.

Für $r = a$ wird $\Phi_{(a)} = Q/4\pi\varepsilon_0 a = \text{const}$.

Damit ist die 2. Bedingung erfüllt: Die leitende Kugel stellt sich auf ein ihrer Ladung entsprechendes Potential ein. Der Aufladung der Kugel gegenüber der ungeladenen Kugel im homogenen Feld entspricht demnach eine Potentialdifferenz $U = Q/4\pi\varepsilon_0 a$, die allein von der Kugel gebrachten Gesamtladung und von dem Radius der Kugel abhängt.

Wenn $\sigma_2 \leq \sigma_1$ ist, so gibt es eine Stelle, auf der die Oberflächenladungsdichte Null ist, auf der also gilt:

(11) $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = 0$ bzw. $3\varepsilon_0 E_0 \cos \vartheta_A - Q/4\pi a^2 = 0.$ (11′)

Dies ist der Fall für ein $\vartheta_A = \arccos (Q/12\pi\varepsilon_0 a^2 E_0)$.

Abb. 1c gibt entsprechend den Abb. 1a und b ein Maß für die sich aus der Überlagerung ergebende Oberflächenladungsdichte.

Gelingt es bei einem veränderlichen E_0 eine der Änderung ΔE_0 entsprechende Ladung ΔQ zu- oder abzuführen, so daß $\vartheta_A = \text{const}$ bleibt, so bleibt die Stelle, an der die Ladungsdichte null herrscht, immer auf dem gleichen Platz der Kugel. Es ist dabei zu beachten, daß dem Punkt (ϑ_A, a) in unserer Abb. 1c im Raum ein „Breitenkreis" der Kugel entspricht. Wir können von einer „neutralen" Linie sprechen, denn im allgemeinen Fall eines beliebig gestalteten Körpers haben wir es nicht mehr mit einem „Breitenkreis", sondern mit einer beliebigen geschlossenen Kurve zu tun. Auf der „neutralen Linie" mündet eine Äquipotentialfläche ein.

Auf dieser Äquipotentialfläche muß sein: $\Phi = Q/4\pi\varepsilon_0 a$.

Für $r = a$ ist dies, wie oben bereits erhalten, erfüllt. Für $r > a$ muß ϑ sich so ändern, daß immer gilt:

$$\Phi = -E_0 (r - a^3/r^2) \cos \vartheta + Q/4\pi\varepsilon_0 r = Q/4\pi\varepsilon_0 a. \tag{12}$$

Eine einfache Zwischenrechnung ergibt

$$\Phi (r) = -E_0 (a^2/r + a + r) \cos \vartheta = Q/4\pi\varepsilon_0 a = \text{const}. \tag{12′}$$

Für gegen Unendlich gehendes r ist in der Klammer a und erst recht a^2/r gegen r vernachlässigbar. Es ist damit auch für die durch die neutrale Linie gehende Äquipotentialfläche die Bedingung erfüllt, daß die Potential-

funktion bei gegen Unendlich gehendem r in die Potentialfunktion des ungestörten Außenfeldes übergehen muß.

2. Anwendung dieser Grundprinzipien bei der Messung des luftelektrischen Potentialgefälles mittels Tropfkollektoren.

Es gilt die Potentialdifferenz eines festen Referenzpunktes gegen Erde zu messen. Wir gehen dazu aus von dem in der Luftelektrizität geläufigen Begriff des spezifischen Säulenwiderstandes [*11*]. Dieser stellt den Gesamtwiderstand einer Luftsäule, die von der Erdoberfläche bis zur luftelektrischen Ausgleichsschicht in ca. 60 km Höhe reicht, dar und ist ein Abbild für die mit der Höhe zunehmende Leitfähigkeit der Luft. In dieser Luftsäule herrscht bipolare Strömung. Die zu messende Potentialdifferenz ist dann der Spannungsabfall am Teilstück w des Gesamtwiderstands W. Sie wird mittels einer Meßanordnung nach Art eines Potentiometerabgriffes am Gesamtwiderstand abgegriffen. Der „Anschluß" der Meßanordnung an den Säulenwiderstand der Luft gelingt mittels der Kollektoren. (Siehe dazu die Abb. 2.)

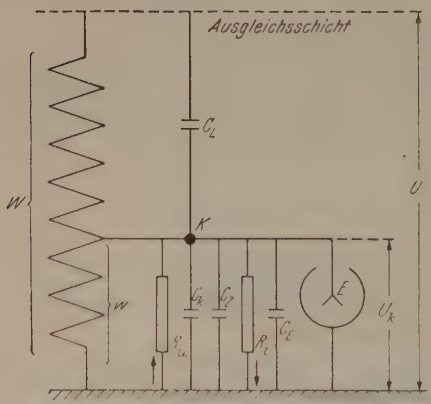


Abb. 2. Ersatzschaltbild für die Potentialgefällemessung mittels Tropfkollektoren.

Denken wir uns eine ungeladene leitende Kugel freischwebend in das luftelektrische Feld gebracht, so nimmt die Kugel das Potential des Bezugspunktes B an, gemäß der vorausgehenden Anordnung a). Führt das luftelektrische Feld Schwankungen aus, so folgt die ungeladene Kugel diesen Schwankungen ohne eine zeitliche Verzögerung, d. h. trägheitslos. Wir haben den *unbelasteten Tropfkollektor*.

Wollen wir aber die Potentialdifferenz der Kugel gegen Erde messen, so muß die Kugel mit irgend einem Meßsystem verbunden werden. Außerdem muß die Kugel in Wirklichkeit an einer Halterung angebracht werden. Das Meßinstrument wird sich meistens in einem Raum befinden, während die Kugel ins Freie geführt werden muß. Die Verbindung zwischen Kugel und Meßinstrument muß demnach hochisoliert durch eine Hauswand geführt werden. Diese hochisolierte Durchführung wird eine hohe Kapazität gegen Erde haben. Durch diese Maßnahmen verursachen wir eine wesentliche *Störung* des Feldes.

Die auf der Kugel influenzierten Ladungen verteilen sich auf das System: Kugel, Zuführung und Meßinstrument. (Es wird im Folgenden als Meßinstrument ein Einfadenelektrometer angenommen.) Von dem Verhältnis der Kapazitäten der Kugel, der Zuführung und des Elektrometers, hängt die Lage der neutralen Linie ab. Die neutrale Linie muß sich jedenfalls nicht mehr notwendig auf der Kugel befinden, sondern kann gegebenenfalls durch die Zuführung verlaufen; der *Bezugspunkt B*, d. h. der

fiktive Punkt, in dem die Symmetrielinie des Systems den ungestörten Verlauf der auf dem System einmündenden Äquipotentialfläche durchstoßen würde, und die neutrale Linie fallen nicht mehr wie in der Anordnung a) zusammen.

Es gilt nun, die neutrale Linie zu zwingen, während der Messung stets durch einen festgelegten Punkt auf der leitenden Kugel zu verlaufen. Dies geschieht nach der Anordnung c) durch eine Aufladung der Gesamtkapazität des Systems. Diese Aufladung erfolgt mit dem Tropfkollektor:

Von der in das Feld gebrachten, leitenden Hohlkugel tropft an einer festgelegten Stelle, dem „*Ausgleichspunkt*" P Wasser ab, das einem Vorrat im Kugelinnern entnommen wird. Mit der Größe der Austrittsöffnung lassen sich Tropfengröße und Tropfenaustrittsgeschwindigkeit regulieren. Ein jeder Wassertropfen entnimmt der Influenzladung einen der am Ausgleichspunkt herrschenden Oberflächenladungsdichte und seiner Eigenkapazität entsprechenden Ladungsbetrag, bzw. führt dem System den entsprechenden Ladungsbetrag des entgegengesetzten Vorzeichens zu. Dieser Ladungszufluß geht so lange vor sich, bis am Ausgleichspunkt die Ladungsdichte Null herrscht und damit im Ausgleichspunkt die Äquipotentialfläche einmündet, auf deren Potential sich das System einstellt. Den Punkt, in dem die Symmetrielinie des Systems diese Äquipotentialfläche in ihrem ungestörten Verlauf schneiden würde, nennen wir *Referenzpunkt R.*

Wir bezeichnen die Differenz zwischen dem Potential des Referenzpunktes und dem Potential des Bezugspunktes mit U_{end} und die Differenz zwischen dem Potential des Ausgleichspunktes zu irgendeinem Zeitpunkt des Aufladevorganges und dem Potential des Bezugspunktes mit U. Da der Aufladevorgang Zeit beansprucht, die Aufladung also mit einer gewissen Trägheit behaftet ist, können wir den Vorgang darstellen als die Aufladung einer Kapazität über einen Widerstand und erhalten für die oben eingeführten Potentialdifferenzen die Formel für einen Einschaltvorgang

$$U = U_{end}\left(1 - e^{-t/R_{ü}C}\right). \tag{13}$$

C bedeutet hierin die Gesamtkapazität des Systems und $R_{ü}$ den scheinbaren Widerstand des mechanischen Ladungstransportes durch das Abtropfen des Wassers. Der Widerstand $R_{ü}$ ist nur von der Größe der Wassertropfen und ihrer Abtropfgeschwindigkeit, aber nicht von der Spannung abhängig. Beim Tropfkollektor erfolgt also die Aufladung des Meßsystems über einen Ohmschen Widerstand.

In Wirklichkeit überlagert sich der Aufladung der Kapazität noch eine Entladung über den endlichen Isolationswiderstand. Diese Entladung vergrößert die Einstellgeschwindigkeit des Systems (siehe dazu [*1*]). Im stationären Gleichgewichtszustand sind Aufladestrom und Entladestrom gleich: nach dem Einschaltvorgang kompensiert der Tropfkollektor die durch die endliche Isolation entstehenden Ladungsverluste.

In Abb. 2 ist das Meßprinzip anhand eines Ersatzschaltbildes erläutert. Dabei ist der luftelektrische Säulenwiderstand eingeführt. Es bedeuten:

C_k die Kapazität des Kollektors gegen Erde,
C_Z die Kapazität der Durchführung durch die Hauswand und der Zuführung gegen Erde,
C_E die Kapazität des Elektrometers gegen Erde,
C_L die Kapazität des Systems gegen die Ausgleichsschicht,
$R_{ü}$ den Widerstand längs des Abtropfstroms,
R_i den Isolationswiderstand,
W den gesamten Säulenwiderstand,
w das Teilstück von W, längs dessen der Spannungsabfall
U_k gemessen werden soll.

Da das luftelektrische Feld natürlichen Schwankungen unterworfen ist, wird in Wirklichkeit der stationäre Gleichgewichtszustand nicht erreicht. Nach Gleichung (11′) ändert sich die Ladungsdichte im Ausgleichspunkt (ϑ_A, a) mit der veränderlichen Feldstärke. Demgemäß ändert sich auch die zuzuführende Ladungsmenge, die bewirken soll, daß die Ladungsdichte im Ausgleichspunkt Null bleiben soll. Entsprechend der sich aus der Gleichung (13) ergebenden Zeitkonstante $\tau = R_{ü} \cdot C$ haben die Schwankungen des luftelektrischen Feldes und die Schwankungen der Anzeige einen Phasenunterschied.

Die Wirkung des Tropfkollektors läßt sich folgendermaßen zusammenfassen: Durch den dem Abtropfstrom des Kollektors entsprechenden Ladungszufluß über einen Ohmschen Widerstand erfolgt ein Ladungsausgleich, der die neutrale Linie mit der Oberflächenladung Null an *eine* Stelle des Meßsystems festlegt. Damit nimmt das Meßsystem das Potential eines immer gleichen Referenzpunktes an und kann den Schwankungen des luftelektrischen Feldes mit einer gewissen Verzögerung folgen. Zugleich wird der Ladungsverlust über die endliche Isolation kompensiert durch eine Ladungszufuhr über den Abtropfstrom.

B. Der radioaktive Kollektor.

Die Grundprinzipien der Wirkungsweise des radioaktiven Kollektors sind Hauptanliegen dieser Arbeit. Nach experimentellen Befunden im Laboratorium und in der Praxis der Messung des luftelektrischen Potentialgefälles verhält sich der radioaktive Kollektor nicht analog zum Tropfkollektor, sondern zeigt in seiner Anzeige eine deutliche Abhängigkeit von der Geschwindigkeit eines Luftstroms, mit dem er angeblasen wird, und außerdem von der Größe der „Belastung". Aus der großen Zahl von vorliegenden Befunden sollen im Folgenden drei Registrierungen das typische Verhalten zeigen:

1. Typische Eigenschaften des radioaktiven Kollektors.

a) Vergleich zwischen Tropfkollektor und radioaktivem Kollektor.

Es wurde folgende Versuchsanordnung verwendet (Abb. 3, Mitte unten): Plattenkondensator aus zwei Netzen im Abstand von 90 cm. Zwischen beiden Netzen war eine Potentialdifferenz von 200 Volt an-

gelegt. Durch ein Netz war der radioaktive Kollektor durchgeführt und in die Kondensatormitte gebracht. Beobachtet wurde die Anzeige des Kollektors bzw. die Abweichung vom Erwartungswert 100 Volt bei verschiedener Anblasrichtung und verglichen mit der Anzeige eines Tropfkollektors.

α) Abb. 3 oben. Der Tropfkollektor *Tr* stellt sich mit einer relativ großen Zeitkonstante auf seinen Endwert ein und bleibt unbeeinflußt vom Anblasen.

β) Unten links und Mitte. Der radioaktive Kollektor zeigt bei Verlauf des Anblasstroms in Richtung der Feldlinien eine einseitige Verschiebung des vom Kollektor angezeigten Potentials in Richtung zum Potential der angeblasenen Kondensatorplatte. Erfolgt das Anblasen senkrecht zu den Feldlinien (rechts Mitte), so stellt sich der Kollektor auf den Erwartungs-

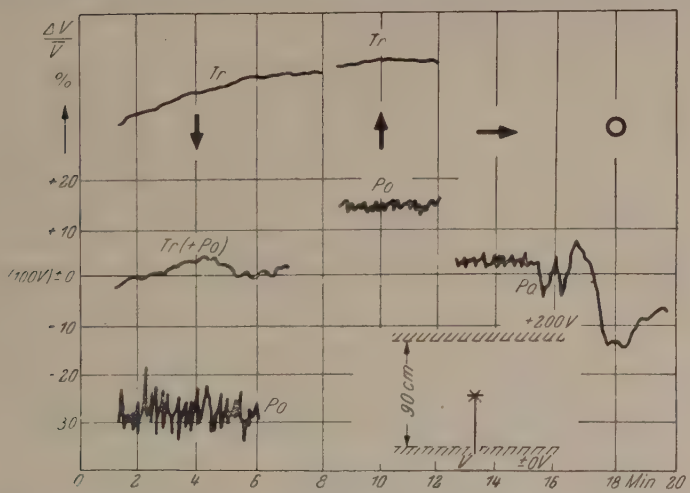


Abb. 3. Potentialänderung im künstlichen Feld durch Verschiebung der durch eine radioaktive Sonde gebildeten Ionenwolke bei einem Luftstrom von 1 m/sec in Pfeilrichtung (*Tr*: Tropfsonde allein; *Po*: Poloniumsonde; *Tr(Po)*: Tropfsonde in der Nähe der Poloniumsonde). — Nach MÜHLEISEN [7].

wert ein. Ohne künstliches Anblasen (rechts außen) zeigt die Kollektoranzeige unregelmäßige Schwankungen um den Erwartungswert, die bis zu 15% betragen können. Diese „Unruhe" der Kollektoranzeige ist darauf zurückzuführen, daß die um den Kollektor aufgebaute Raumladungswolke durch die auch bei „Luftstille" vorhandenen thermisch bedingten kleinturbulenten Luftbewegungen hin- und hergetragen wird.

γ) Wird der Tropfkollektor in die Nähe des radioaktiven Kollektors gebracht (links außen *Tr* [+ *Po*]), so nimmt er Ladungen aus der Raumladungswolke auf, was nach dem Vorangehenden gleichbedeutend mit einer Änderung seines Potentials ist.

b) Windabhängigkeit.

Nach der gleichen Arbeit von R. MÜHLEISEN [7] (siehe Abb. 3) wird die „Feinstruktur" einer Registrierung eines radioaktiven Kollektors durch Anblasen mit einem konstanten Luftstrom aufgehoben.

c) *Abhängigkeit von der Belastung.*
(Siehe Abb. 4.)

Nach H. PFLEIDERER [*10*] zeigt ein „im Kurzschluß arbeitender" Kollektor eine erhebliche Windabhängigkeit. Unter einem im „Kurzschluß" arbeitenden Kollektor versteht man eine Meßanordnung, deren Isolationswiderstand bzw. Meßwiderstand so niedrig ist, daß die Spannung zwischen Kollektor und Erde fast zusammenbricht und dem Kollektor damit nahezu Erdpotential erteilt wird. Damit liegt fast die gesamte Spannung U_0 an dem Kollektorwiderstand. Die Spannungsabhängigkeit dieses Widerstands gewinnt größten Einfluß, der vom Kollektor gelieferte Strom ist nicht der Spannung proportional. Der Kollektor wird damit hoch belastet. Die Fraglichkeit der Verwendung eines solchen hochbelasteten Kollektors wird uns noch im folgenden beschäftigen.

Abb. 4. Anzeige eines „im Kurzschluß arbeitenden" radioaktiven Kollektors in Parallele zum Windverlauf. — Nach PFLEIDERER [*10*].

Weitere, das Kollektorproblem aufwerfende experimentelle Ergebnisse werden in neueren Arbeiten mitgeteilt [*6*], [*7*], [*8*], [*9*], [*12*], [*13*], [*14*], [*15*], [*16*], [*17*]. In den letzten Arbeiten [*12*] bis [*17*] aus dem Nationalen Geophysikalischen Institut in Rom ist außerdem eine eingehende theoretische Untersuchung des radioaktiven Kollektors enthalten. Als Kollektormodell diente hier eine seitlich ins Unendliche verlaufende ionisierte Schicht im Feld des unendlich ausgedehnten Plattenkondensators. Für dieses Modell wird Feld- und Potentialverlauf für den aus der unendlichen ionisierten Schicht durch Feldwirkung sich in Richtung auf die Platten sich bewegenden Ionenstrom errechnet und außerdem das Verhalten des Stroms untersucht, wenn zusätzlich ein Transport der Ionen durch einen Luftstrom angenommen wird. Der Theorie werden Experimente gegenübergestellt; es zeigen sich zwischen beiden Diskrepanzen, die auf die Abweichung des Kollektormodells von den realen Dimensionen des Kollektors zurückzuführen sind.

Die angeführten typischen Erscheinungen, die zeigen, daß sich der radioaktive Kollektor in der Praxis der Potentialmessung wesentlich anders verhält, als zu erwarten ist, erfordern eine theoretische Untersuchung. Die in den oben angeführten theoretischen Untersuchungen auftretenden Dis-

krepanzen gaben Anlaß, die Wirkungsweise des radioaktiven Kollektors anhand eines neuen Modells zu untersuchen.

Es ist von Vorteil, das Prinzip der Wirkungsweise des radioaktiven Kollektors mittels eines Ersatzschaltbildes zu erläutern.

2. Ersatzschaltbild.

(Siehe Abb. 5.)

Wir benützen auch hier den bereits beim Tropfkollektor eingeführten Begriff des „spezifischen Säulenwiderstandes" der Luftschicht zwischen Erdboden und luftelektrischer Ausgleichsschicht [*11*]. Die zu messende Potentialdifferenz ist dann wieder der Spannungsabfall, den der Vertikalstrom am Teilstück w des spezifischen Säulenwiderstands W erzeugt.

Der „Anschluß" des Meßsystems an den Säulenwiderstand wird folgendermaßen erhalten: Um den radioaktiven Kollektor bildet sich durch die ionisierende Wirkung der α-Strahlen ein Gebiet mit einer gegenüber der normalen Leitfähigkeit der Luft wesentlich erhöhten Leitfähigkeit. Einer Strecke in diesem Gebiet erhöhter Leitfähigkeit entspricht ein Widerstand längs dieser Strecke, den wir mit „Übergangswiderstand" $R_{ü}$ bezeichnen wollen. Mit diesem Widerstand greifen wir gewissermaßen in Form eines Potentiometerabgriffes die über w liegende Spannung ab (Abb. 5). Gemessen wird diese Spannung an einem Widerstand R_g, der mit $R_{ü}$ einen Spannungsteiler bildet[1].

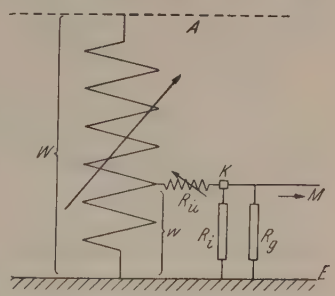


Abb. 5. Ersatzschaltbild zur Messung des luftelektrischen Potentialgefälles.

Ist der Meßwiderstand nicht spannungsabhängig und gelingt es, den Isolationswiderstand konstant zu halten, so beschränkt sich das Problem der Meßsicherheit auf eine Untersuchung des Verhaltens des Kollektorwiderstandes $R_{ü}$ längs der unipolaren Strömung.

Stellt sich, wie es tatsächlich der Fall ist, der Kollektorwiderstand als spannungs- bzw. stromabhängig heraus, so wird zu fordern sein, daß der sich längs ihm einstellende Spannungsabfall bei der Messung klein bleibt, denn dann fällt seine Spannungsabhängigkeit nicht wesentlich ins Gewicht. Der Meßwiderstand R_g muß also so groß sein, daß er $R_{ü}$ um ein Mehrfaches übertrifft. Dagegen ist bei kurzgeschlossenem Kollektor — es ist dann $R_g < R_{ü}$ — der Spannungsabfall längs $R_{ü}$ so groß, daß sich die Spannungsabhängigkeit sehr stark auswirken muß.

Als wesentliches Problem des radioaktiven Kollektors erweist sich somit die Art seiner Spannungsabhängigkeit, oder mit andern Worten die funktionale Abhängigkeit zwischen der Spannung, die der radioaktive Kol-

[1] Dieser Meßwiderstand R_g hängt ab von der Wahl der Meßmethode: Bei Verwendung einer Röhrenschaltung entspricht R_g der Parallelschaltung von Gitterableitwiderstand und Isolationswiderstand. Bei Verwendung eines Elektrometers oder eines elektrostatischen Voltmeters besteht R_g allein aus dem Isolationswiderstand.

lektor überbrücken soll und dem dabei fließenden Strom. Diese Abhängigkeit ist mit Sicherheit keine lineare.

3. Grundanschauungen zur Theorie der unipolaren kugelsymmetrischen Strömung im Kugelkondensator.

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung wählen wir einen kugelförmigen Kollektor und setzen ihn in den Mittelpunkt einer leitenden Hohlkugel[1].

Um eine metallische Kugel, auf die ein radioaktiver Belag aufgebracht ist, bildet sich innerhalb einer Kugelschale, deren Durchmesser durch die Reichweite der α-Strahlen bestimmt ist, ein Gebiet mit Ladungen beider Vorzeichen. Die dieser bipolaren Raumladung entsprechende Leitfähigkeit der Luft ist um mehrere Zehnerpotenzen höher als die normale Leitfähigkeit der Luft. Wir können demnach das bipolare Gebiet gegenüber der Luft als einen Leiter bezeichnen und nehmen seine äußere Begrenzung als Leiteroberfläche. Diese leitende Kugel mit dem Radius a (a = Radius der Metallkugel plus Reichweite der α-Strahlen) bildet mit der äußeren Kugel mit dem Radius b einen Kugelkondensator.

Legen wir an diesen Kugelkondensator eine Spannung an und erzeugen damit im Kondensatorinnern ein kugelsymmetrisches elektrisches Feld, so bewegen sich Ladungen eines Vorzeichens aus dem bipolaren Gebiet heraus längs der Feldlinien zur äußeren Belegung des Kondensators hin: Es bildet sich eine unipolare kugelsymmetrische Strömung. Die Ladungen des entgegengesetzten Vorzeichens fließen über den Meßwiderstand nach dem einen Pol der Spannungsquelle ab und erzeugen an dem Meßwiderstand einen Spannungsabfall. Die Gesetzmäßigkeit der unipolaren Strömung gilt es zu erfassen.

Die die unipolaren Ladungen bewegenden Kräfte stammen einmal vom elektrischen Feld des Kugelkondensators, zum andern entspringen sie der Abstoßung durch die Felder der gleichnamigen Nachbarladungen. Es sollen deshalb, analog dem Vorgang beim Tropfkollektor, die zwei auftretenden Felder einzeln betrachtet werden. Danach ist die sich einstellende unipolare Strömung zu untersuchen, wenn beide Felder zusammen auftreten.

a) Elektrostatisches Feld im Kugelkondensator.

Hat die innere Kugel in Abb. 6a die Gesamtladung Q und den Radius a, so ist die Oberflächenladungsdichte auf ihr $\sigma = Q/4\pi a^2$ und damit der Betrag der Feldstärke

$$E_{(a)} = Q/4\pi\varepsilon_0 a^2. \tag{14}$$

Im Kondensatorinnern ist die Feldstärke

$$E_{(r)} = Q/4\pi\varepsilon r^2 \tag{15}$$

und die Potentialfunktion $\Phi_{(r)} = Q/\pi\varepsilon_0 r$.

[1] Die Wahl z. B. eines Rotationsellipsoids als Kollektormodell in einem ellipsoidischen Kondensator wäre grundsätzlich möglich und käme den in der Wirklichkeit meist verwendeten Kollektortypen näher, würde aber einen größeren mathematischen Aufwand erfordern.

Auf der Außenkugel mit dem Radius b gilt $\Phi_{(b)} = Q/4\pi\varepsilon_0 b$.
Zwischen Innen- und Außenkugel herrscht die Potentialdifferenz

$$U = \Phi_{(a)} - \Phi_{(b)} = Q/4\pi\varepsilon_0 (1/a - 1/b) = Q/4\pi\varepsilon_0 (b-a)/b\cdot a. \quad (16)$$

Im Kondensatorinnern gilt die LAPLACEsche Gleichung

$$\text{div } E = -\Delta\varphi_{(r)} = 0. \quad (17)$$

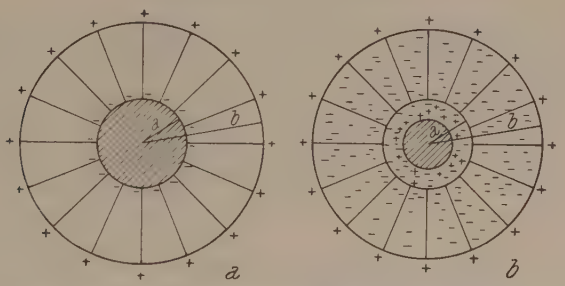


Abb. 6. Kugelkondensator. *a*) Kugelsymmetrisches Feld eines Kugelkondensators. *b*) Unipolare kugelsymmetrische Strömung im kugelsymmetrischen Feld eines Kugelkondensators.

b) Unipolare, kugelsymmetrische Strömung im feldfreien Raum.

Von einer Punktquelle gehe eine unipolare kugelsymmetrische Strömung aus.

Die Strömung sei stationär, d. h. es gelte

$$\text{div } i = 0 \quad \text{bzw.} \quad 4\pi r^2 i = \text{const.} = I. \quad (18)$$

Der durch eine Kugeloberfläche hindurchfließende Gesamtstrom ist für jeden Abstand dieser Kugeloberfläche vom Quellpunkt der Strömung in ihrem Mittelpunkt konstant.

Im gesamten Raum gilt die POISSONsche Gleichung

$$\text{div } E = -\Delta\Phi_{(r)} = \varrho/\varepsilon_0.$$

Wir betrachten zwei Kugeloberflächen, die vom Quellpunkt die Abstände a und b haben mögen. Durch beide geht der gleiche Gesamtstrom I. Aus der Lösung der POISSONschen Gleichung für die beiden Aufpunkte a und b ergeben sich zwei Potentiale $\Phi_{(a)}$ und $\Phi_{(b)}$. Bezeichnen wir ihre Differenz mit U, so können wir formal einen Widerstand R_{ii} definieren zwischen a und b nach folgender Gleichung:

$$U = \Phi_{(a)} - \Phi_{(b)} = R_{ii}\cdot I. \quad (19)$$

Diese Definitionsgleichung hat aber nicht die Bedeutung des OHMschen Gesetzes, denn der Widerstand ist von der Belastung, d. h. vom Strom abhängig: $R = f$ (I).

c) Unipolare kugelsymmetrische Strömung im Kugelkondensator.

Dies bildet den Inhalt der folgenden eingehenden Untersuchung. Abb. 6 b dient zur Veranschaulichung der gegebenen physikalischen Verhältnisse.

C. Die unipolare kugelsymmetrische Strömung.

I. Mathematische Behandlung.

Es soll im folgenden das praktische Meßsystem verwendet werden.

1. Ausgangsgleichungen.

Von einer Punktquelle gehe radial eine unipolare Strömung aus. Die Strömung sei stationär, d. h. es gelte im ganzen Raum $\operatorname{div} i = 0$ oder nach Integration $i \cdot 4\pi r^2 = \text{const.} = I$. Es geht also durch eine jede Kugeloberfläche $4\pi r^2$ (beliebiger r) der gleiche, konstante Gesamtstrom I, während die Stromdichte i r-abhängig ist. Der Strömung entspricht eine Ladungsverteilung im Raum: $\varrho = \varrho_{(r)}$. Also gilt im ganzen Raum

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \varrho \quad \text{bzw. da} \quad \mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E} \quad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \varrho / \varepsilon_0. \tag{20}$$

Das kugelsymmetrische Feld sei rotationsfrei; dann gilt $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \Phi$. Anstelle von (20) erhalten wir dann die Poissonsche Gleichung:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \Delta \Phi = -\varrho / \varepsilon_0. \tag{20'}$$

Zur Verdeutlichung der vorliegenden Verhältnisse sei nochmals an die drei in Abschn. B, 3a, b und c, angegebenen Fälle erinnert.

Die Überlagerung c) wird sich nicht wie beim Tropfkollektor in Form einer ungestörten Superposition durchführen lassen, da im Falle a) die Laplacesche Gleichung und im Falle b) die Poissonsche Gleichung im Raum gilt, bzw. da das Feld von b) bei einer Überlagerung vom Feld von a) abhängig ist.

Wir betrachten zur Erläuterung dessen die Art der Ionenbewegung. Die Ionen laufen längs der Stromlinien unter Einwirkung von elektrischen Feldern. An Feldern haben wir folgende zur Verfügung:

1. Das Feld von a), also das Feld von auf der Kugeloberfläche festgehaltenen Oberflächenladungen.

2. Das Feld von b) also, die Überlagerung der Eigenfelder derjenigen Raumladungen, die hinter den Ionen zurückliegen, deren Bewegungen betrachtet werden sollen, die also näher an der Ionenquelle liegen als die betrachteten.

Die Feldstärken von 1. und 2. überlagern sich nicht additiv, denn die Feldstärke von 1. beeinflußt die Raumladungsverteilung und damit die Feldstärke von 2.

Es ist also: $$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{f}(\mathfrak{E}_1). \tag{21}$$

Eine neue Raumladungsverteilung, die sich durch die Feldstärke $\mathfrak{E}_1$ einstellt, ergibt eine Änderung der Feldstärke $\mathfrak{E}_2$. Dabei wird die Bedingung $I = \text{const.}$ eingehalten: Eine Vergrößerung der Feldstärke hat eine Vergrößerung der Ionengeschwindigkeit $\mathfrak{v} = k \cdot \mathfrak{E}$ zur Folge. Zugleich aber wird die Raumladungsdichte so verkleinert, daß die Zahl der durch jede Oberfläche in der Zeiteinheit tretenden Ionen konstant ist:

$$I = 4\pi r^2 i = 4\pi r^2 \varrho \cdot k \cdot \mathfrak{E}. \tag{22}$$

Da ϱ eine Funktion von I ist, stellt diese Gleichung nicht das Ohmsche Gesetz dar, sondern dient lediglich zur Definition einer Leitfähigkeit

$$\lambda = \varrho \cdot k \qquad \text{(wo } k \text{ die Ionenbeweglichkeit ist).}$$

2. Feldstärke, Raumladungsverteilung, Gesamtraumladung und Leitfähigkeit (1. Integration).

Wir behandeln das Problem in räumlichen Polarkoordinaten, nehmen aber Kugelsymmetrie an. Es gilt also, nur die r-Komponenten zu finden, d. h. die Abhängigkeit der Werte der einzelnen Größen vom Abstand des Aufpunktes vom Quellpunkt. Eine ϑ- und eine ω-Abhängigkeit haben wir nicht.

Zusammenfassung von (28) und (29) ergibt:

$$\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = i/\varepsilon_0 K = I/4\pi\varepsilon_0 K r^2. \tag{23}$$

In räumlichen Polarkoordinaten ist

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\,\mathfrak{E}_r).$$

Nach Einführung von $E = |\mathfrak{E}_r|$ und $\mathrm{div}\,E$ erhalten wir aus (23)

$$(E r^2)\frac{d}{dr}(E r^2) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 k} r^2. \tag{23'}$$

Die Integration ergibt

$$(E r^2)^2 = r^3 I/(6\pi k \varepsilon_0) + C \tag{24}$$

und liefert somit für die *Feldstärke*

$$E = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C} \tag{25}$$

mit

$$\beta \equiv 6\pi k \varepsilon_0.$$

Für die Raumladung gilt $\varrho(r) = I/4\pi r^2 k E$; daraus folgt mit (25) die *Raumladungsverteilung*

$$\varrho(r) = I/4\pi k \sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C}. \tag{26}$$

Entsprechend $\lambda = k \cdot \varrho$ folgt daraus für die *Leitfähigkeit*

$$\lambda(r) = I/4\pi \sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C}. \tag{27}$$

Die zwischen zwei Kugelschalen mit den Radien a und b eingeschlossene *Gesamtraumladung* wird

$$P_{(b,\,a)} = \int_a^b 4\pi r^2 \varrho(r)\,dr = 4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C}\Bigg|_a^b. \tag{28}$$

3. Potentialfunktion (2. Integration).

Für die Potentialfunktion erhalten wir durch Integration der Formel für die Feldstärke:

$$\Phi_{(r)} - \Phi_{(a)} = -\int_a^r E\,dr.$$

Mit (25) und $A \equiv I/\beta \cdot C$ ergibt dies

$$\Phi_{(r)} - \Phi_{(a)} = -\sqrt{C} \int_a^r \frac{1}{r^2} \sqrt{A r^3 + 1}\,. \tag{29}$$

Die Integration läßt sich geschlossen durchführen. Zur Untersuchung des Verhaltens der Potentialfunktion beim Grenzübergang gegen Null und Unendlich ist es außerdem von Vorteil, eine Integration durch Reihenentwicklung durchzuführen.

a) Geschlossene Integration.

Die Substitution $A r^3 \equiv t^3$ und eine partielle Integration ergeben

$$\Phi_{(r)} - \Phi_{(a)} = -A^{1/3}\sqrt{C}\, I_1 \text{ und } I_1 = -\frac{\sqrt{t^3+1}}{t}\Bigg|_{t_r=a}^{t_r=r} + \frac{3}{2}\int_{t_r=a}^{t_r=r} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^3-1}}. \tag{30}$$

Es ist zu lösen:

$$I_2 = \int_{t_a}^{t_r} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^3+1}} = \int_{\infty}^{t_r} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^3+1}} - \int_{\infty}^{t_a} \frac{t\,dt}{\sqrt{t^3+1}}. \tag{31}$$

Dies sind zwei elliptische Integrale 2. Gattung. Ihre Lösung führt aus (29) zur gesuchten Formel für die Potentialdifferenz

$$\Phi_{(a)} - \Phi_{(r)} = \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C}}{r} \cdot \frac{2 \cdot \sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}}\, r - (1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}}\, r + 1 + \sqrt{3}}\Bigg|_a^r +$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{I}{\beta}}\, \sqrt[6]{C}\; 3\sqrt[4]{3}\left(E(k,\varphi) - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} F(k,\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi_a}^{\varphi_r} \tag{32}$$

bzw. für die Potentialfunktion eines laufenden Aufpunktes mit dem Abstand r vom Quellpunkt:

$$\Phi_{(r)} = \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} r^3 + C}}{r} \cdot \frac{2\sqrt[3]{\frac{I}{\beta C}}\, r - (1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta C}}\, r + 1 + \sqrt{3}} +$$

$$+ 3\sqrt[4]{3}\, \sqrt[3]{\frac{I}{\beta}}\, \sqrt[6]{C}\left(E(k,\varphi) - \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{3}} F(k,\varphi)\right) \tag{33}$$

In dieser Formel bedeuten:

I den überall im Raum konstanten Strom,

C die von der ersten Integration herrührende Integrationskonst. $\beta \equiv 6\pi k \varepsilon_0$, wo k die Ionenbeweglichkeit und die Dielektrizitätskonstante im Vakuum sind.

$F(k, \varphi)$ und $E(k, \varphi)$ sind die elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Gattung in der Legendreschen Normalform.

k ist der Modul der ellipt. Integrale $\sqrt{2 + \sqrt{3}}/2$

φ, die Amplitude der ellipt. Integrale, hängt nach

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}} r + 1 - \sqrt{3}}{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}} r + 1 + \sqrt{3}}$$

von r, I, C und β ab.

b) Integration durch Reihenentwicklung.

Für die Feldstärke hatten wir:

$$E_{(r)} = \sqrt{C}\,\frac{1}{r^2}\sqrt{A r^3 + 1} \qquad \text{mit } A \equiv \frac{I}{\beta \cdot C}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

Für $A r^3 < 1$ entwickeln wir nach $A r^3$,

für $A^3 r > 1$ entwickeln wir nach $\frac{1}{A r^3}$.

Die Integration der erhaltenen Reihenentwicklung führt zu dem Ergebnis:

$$\Phi_{(a)} - \Phi_{(r)} = \begin{cases} + \dfrac{\sqrt{C}}{r} - \sum_1^\infty n \binom{1/2}{n} \dfrac{A^n}{3n-1} r^{3n-1} \Big|_a^r & \text{für } A r^3 < 1 \\ - 2\sqrt{\dfrac{I}{\beta}}\sqrt{r} + \sum_1^\infty n \binom{1/2}{n} \dfrac{A^{-n}}{6n-1} r^{-(3n-1/2)} \Big|_a^r & \text{für } A r^3 > 1. \end{cases} \tag{34}$$

4. Formel für den Widerstand.

Wir definieren einen Widerstand $R = U/I$ als das Verhältnis zwischen der Potentialdifferenz an zwei Kugelschalen mit den Radien a und b und dem fließenden Strom.

Da
$$U = \Phi_{(a)} - \Phi_{(b)} = -\int_a^b E_{(r)}\,dr,$$

ist
$$R = -\int_a^b \frac{E_{(r)}}{I}\,dr$$

und mit dem Ergebnis der geschlossenen Integration

$$R = -\frac{\sqrt{\frac{r^3}{I\cdot\beta}+C}}{r}\cdot\frac{2\cdot\sqrt[3]{\frac{I}{\beta\cdot C}}\,r-(1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta\cdot C}}\,r+(1+\sqrt{3})}\Bigg|_a^b - \sqrt[3]{\frac{1}{I^2\beta}}\sqrt[6]{C}\,3\cdot\sqrt[4]{3}\left(E(k,\varphi)-\frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{3}}F(k,\varphi)\right)\Bigg|_{\varphi_a}^{\varphi_b}; \tag{35}$$

dagegen wird mit dem Ergebnis der Integration durch Reihenentwicklung

$$R=\begin{cases} +\sqrt{\frac{C}{I^2\cdot r^2}}-\sum_1^\infty n\binom{1/2}{n}\frac{I^{n-1}}{(3n-1)(\beta\cdot C)^n}r^{3n-1} & \text{für } A r^3<1 \\ -2\sqrt{\frac{r}{I\cdot\beta}}+\sum_1^\infty n\binom{1/2}{n}\frac{(\beta\cdot C)^n}{(6n-1)I^{n-1}r^{3n-\frac{1}{2}}} & \text{für } A r^3>1. \end{cases} \tag{36}$$

Zum gleichen Ergebnis kommen wir auf einem andern Weg:

Für die Raumladung hatten wir Gleichung (26) und für die am Aufpunkt r herrschende örtliche Leitfähigkeit Gleichung (27) und daraus mit $w = 1/\lambda$ den auf das Volumenelement τ bezogenen Widerstand. Der Gesamtwiderstand einer Kugeloberfläche entspricht einer Parallelschaltung dieser auf das Volumenelement bezogenen Widerstände:

$$1/w_f = \int 1/w\cdot df$$

bzw., da ω auf der Oberfläche f konstant ist,

$$w_f = w/4\pi r^2 = \sqrt{\frac{7}{\beta}r^3+C}/r^2 I.$$

Eine Integration dieser Flächenwiderstände über den Raum von a bis b entspricht einer Hintereinanderschaltung der einzelnen Flächenwiderstände und ergibt den Gesamtwiderstand:

$$R=\frac{1}{I}\int_a^b\frac{\sqrt{\frac{I}{3}r^3+C}}{r^2}\,dr. \tag{37}$$

Dies entspricht der obigen Definition von R.

II. Physikalische Deutung.

1. Die Integrationskonstante C.

Eine *Innenkugel* mit dem Radius a und eine *Außenkugel* mit dem Radius b, beide konzentrisch zueinander gelagert, bilden zusammen einen Kugelkondensator. Es sind wie auf S. 438f drei Fälle zu unterscheiden:

a) Auf der Innenkugel ist eine Oberflächenladung aufgebracht und auf die Außenkugel die gleiche Ladung mit entgegengesetztem Vorzeichen. Im Kondensatorinnern besteht ein *elektrostatisches* Feld.

b) Von der Innenkugel geht eine unipolare Strömung aus. Die Außenkugel wirkt nicht auf sie, sondern hat lediglich die Bedeutung einer Aufpunktsfläche. Es besteht eine *reine unipolare Strömung.*

c) Die Senke der unipolaren Strömung liegt auf der Außenkugel. Auf Außen- und Innenkugel befinden sich, entsprechend einer fest vorgegebenen Potentialdifferenz zwischen beiden, Oberflächenladungen. Wir haben eine *unipolare Strömung im Kugelkondensator.*

Der Fall c) liegt in Wirklichkeit vor und wird durch die im Vorausgehenden entwickelten Funktionen dargestellt. Die Fälle a) und b) erweisen sich auch analytisch als Spezialfälle des allgemeinen Falles c). Es sollen diese Spezialfälle untersucht werden. Es wird sich dabei eine Deutung der Integrationskonstante C, die in alle Gleichungen eingegangen ist, ergeben.

a) Gegeben sei ein kugelförmiger Leiter mit dem Radius a. In seinem Innern herrscht die Feldstärke Null. Hat der Leiter eine Oberflächenladung Q, so entspricht der Oberflächenladungsdichte ∂ eine Flächendivergenz

$$\text{Div}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{n\,\text{außen}} - \mathfrak{E}_{n\,\text{innen}} = \sigma/\varepsilon_0$$

d. h. die Normalkomponente der Feldstärke springt beim Durchschreiten der geladenen Oberfläche von Null auf

$$|\mathfrak{E}_{n\,\text{außen}}| = Q/4\pi\,\varepsilon_0\,a^2.$$

Außerhalb des Leiters in einem Aufpunkt r herrscht die Feldstärke

$$E = Q/4\pi\,\varepsilon_0\,r^2.$$

In diesem Falle ist keinerlei Raumladung vorgegeben, es fließt damit auch kein Strom.

Wenn die allgemeine Formel (25) für die Feldstärke nach Nullsetzung von I der oben hergeleiteten Feldstärke gleichgesetzt wird, bekommt man

$$C = (Q/4\pi\,\varepsilon_0)^2. \tag{38}$$

Die Integrationskonstante C ist also proportional dem Quadrat einer Oberflächenladung, die ein elektrostatisches Feld zur Folge hat. Rechnen wir anstatt im praktischen Maßsystem im absoluten elektrostatischen Maßsystem, so wird direkt $C = Q^2$.

Der Fall a) entspricht also $I = 0$.

b) Ein elektrisches Feld soll nur durch die Eigenfelder der Raumladungen hervorgebracht werden, die im Raum $r < r_1$ sich befinden, wenn r_1 der Abstand des betrachteten Aufpunkts vom Quellpunkt ist. Wenn also die Raumladungsdichte und mit ihr der Strom gegen Null geht, muß zugleich die Feldstärke gegen Null gehen. Es muß demnach in diesem Falle sein:

$$\lim_{I \to 0} (E_{(r)}) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{I \to 0} \frac{1}{r^2} \sqrt{\frac{\Im}{\beta} r^3 + C} = 0.$$

Damit muß notwendig $C = 0$ sein.

Die *reine unipolare Strömung* wird also analytisch dargestellt durch Nullsetzen von C in den Gleichungen (25), (26), (27) und (28).

Die Potentialfunktion ergibt sich hier aus einer einfachen Integration der Formel für die Feldstärke:

$$(\Phi_{(r)})_{C=0} = -2\sqrt{I/\beta}\cdot r^{1/2}$$

und der Gesamtwiderstand über den Innenraum des Kondensators

$$R = 2\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{I\cdot\beta}} = 4\cdot\frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{U\cdot\beta}.$$

c) In diesem Fall ist $I \neq 0$ und $C \neq 0$.

Wir diskutieren den Fall, indem wir z. B. in der Formel für die Raumladung die Änderung der Raumladung analytisch verfolgen für Änderungen von I und C.

Nach (26) verringert ein Wachsen von C die Raumladungsdichte ebenso, wie ein Wachsen von I sie vergrößert und umgekehrt. Dagegen wird die Feldstärke nach (25) von I und C gleichsinnig verändert. Ein Anwachsen von C vergrößert die Feldstärke, obwohl es die Raumladungsdichte und damit auch die von der Raumladung stammende Feldstärke verkleinert. Da die elektrostatische Feldstärke sich auf die Raumladungsverteilung und damit auf die Raumladungsfeldstärke auswirkt, können sich die beiden Feldstärken auch nicht nach dem Gesetz der Vektoraddition superponieren.

Es erhebt sich die Frage, welche physikalischen Größen einer einfachen Addition gehorchen. In der Gleichung

$$(E^{(r^2)})^2 = \frac{I}{\beta}r^3 + C$$

haben wir eine reine Addition von Größen. Um die diesen Größen entsprechenden physikalischen Begriffe zu finden, müssen wir auf den Begriff der Maxwellschen Spannungen zurückgreifen, d. h. auf den Spannungszustand des von elektrischen Kraftlinien erfüllten Raumes. Dieser Spannungszustand überträgt im Sinne der Nahwirkungstheorie die Kraftwirkung von einer Ladung auf die andere. Teilen wir ein im elektrischen Gleichgewicht befindliches System durch eine geschlossene Fläche f, in unserem Falle durch eine Kugeloberfläche, in zwei Teile und bezeichnen den eingeschlossenen inneren Teil mit 1 und den äußeren Teil des Systems mit 2, dann muß die gesamte Kraft, die von 1 auf 2 ausgeübt wird, in irgendeiner Weise durch die Fläche f treten. Es ist diese Kraft einmal als Volumenintegral über eine räumliche Kraftdichte $\mathfrak{k}$ darzustellen und zum andern als Oberflächenintegral über Flächenkräfte. Es muß also sein:

$$\mathfrak{K} = \int_D \mathfrak{k}\, d\tau = \int_F \mathfrak{T}\, df. \tag{39}$$

Nach dem Gaussschen Satz stehen dann die beiden Integranden in folgender Beziehung zueinander: $\mathfrak{k} = \operatorname{div}\mathfrak{T}$.

$\mathfrak{T}$ ist der Maxwellsche Spannungstensor. In unserem Falle ist sein Betrag $|\mathfrak{T}| = E^2\varepsilon_0/2$. Damit haben wir bereits eine Darstellung für die durch die Fläche f hindurchtretende Gesamtkraft.

Betrachten wir die Kraft, die durch die Kugeloberfläche mit dem Radius $r = b$ hindurchtritt, so bekommen wir für Gleichung (24)

$$E^2_{(b)}\, b^4 = \frac{I}{\beta}\, b^3 + C \quad (\beta = 6\pi\, k\, \varepsilon_0)\,.$$

Diese Gleichung läßt sich umformen in

$$\varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot 4\pi\, b^2 = \left(\frac{2\,I}{4\pi\, b^2\, k} + \frac{4\pi\, \varepsilon_0\, C}{b^2 \cdot {}^4/_3 b^3\, \pi}\right) \cdot {}^4/_3\, b^3\, \pi\,.$$

Dies können wir in entsprechende Integrale verwandeln:

$$\int_f \frac{\varepsilon_0 \cdot E^2}{2}\, df = \int_v \left(\frac{\mathrm{i}}{k} + \frac{4\pi\, \varepsilon_0\, C}{2 \cdot b^2 \cdot {}^4/_3\, \pi\, b^3}\right) d\tau \equiv \mathfrak{K}\,. \tag{40}$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit der oben gegebenen Gleichung (39), so haben wir die folgende Analogie. $\varepsilon_0 E/2$ entspricht einer Oberflächenkraftdichte, während auf der rechten Seite als Integrand eine Volumenkraftdichte stehen muß. Es muß also die Volumenkraftdichte sein

$$\mathfrak{k} = \frac{i}{k} + \frac{4\pi\, \varepsilon_0\, C}{2\, b^2\, {}^4/_3\, b^3\, \pi}\,.$$

Davon ist $\frac{i}{k}$ die von der räumlich verteilten Ladung stammende mittlere Dichte der Kraft, bezogen auf das Volumenelement, während der zweite Summand mit (38) gleich $\frac{E_Q \cdot Q}{2} \cdot \frac{1}{{}^4/_3\, b^3\, \pi}$ wird

(mit $E_Q = \frac{Q}{4\pi\, \varepsilon_0\, b^2}$, der Stärke des von der Ladung Q in der Entfernung b erzeugten Feldes) und die auf das Volumenelement bezogene Kraft ist, die von im Mittelpunkt befindlichen und dort festgehaltenen Ladungen Q auf Ladungen $Q' = -Q$ entgegengesetzten Vorzeichens, die sich auf der Kugeloberfläche b befinden, ausgeübt wird. Die von Raumladungen stammende Kraftdichte und die von Oberflächenladungen stammende Kraftdichte addieren sich also vektoriell. Dieser Summe der räumlichen Kraftdichten entspricht dann die Flächenkraftdichte, die mit der örtlichen Feldstärke verbunden ist.

Mit andern Worten: In unserer umgeänderten Gleichung (24) haben wir einmal auf der linken Seite den nach der Nahwirkungstheorie dargestellten Gesamtkraftfluß durch eine Kugeloberfläche mit dem Radius b und auf der rechten Seite den nach der Fernwirkungstheorie sich ergebenden Kraftfluß durch die Fläche.

Es sei hier noch eine Betrachtung über die verschiedenen Ladungen angefügt, welche die für uns in Frage kommenden Feldstärken hervorrufen.

Nach (25) herrscht auf der Oberfläche mit dem Abstand b die Feldstärke

$$E_{(b)} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{I}{\beta}\, b^3 + C}$$

und auf der Oberfläche mit dem Abstand a vom Mittelpunkt die Feldstärke

$$E_{(a)} = \frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{I}{\beta}a^3 + C}.$$

Entsprechend der Gleichung (15) können wir uns die Feldstärke $E_{(b)}$ auch von einer Punktladung $Q_b = 4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{I}{\beta}b^3 + C}$ im Mittelpunkt erzeugt denken und die Feldstärke $E_{(a)}$ von einer Punktladung $Q_{(a)} = 4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{I}{\beta}a^3 + C}$ im Mittelpunkt.

In der Elektrostatik ist es gleichgültig, ob man die Ladungen sich punktförmig vorstellt oder auf eine entsprechende Oberfläche verteilt denkt.

Wir denken uns also die obigen Punktladungen, die die Feldstärke $E_{(a)}$ bzw. $E_{(b)}$ elektrostatisch erzeugen könnten, auf die entsprechenden Oberflächen verteilt. Den Feldstärken entsprechen die Potentiale

$$\Phi_{(b)} = Q_b/4\pi\varepsilon_0 b = \sqrt{\frac{I}{\beta}b^3 + C}/b \quad \text{bzw.} \quad \Phi_{(a)} = \sqrt{\frac{I}{\beta}a^3 + C}/a.$$

In Gleichung (28) hatten wir bei unipolarer Strömung für die zwischen zwei Kugeloberflächen mit den Radien b und a befindliche Raumladung:

$$P_{(b,\,a)} = 4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{I}{\beta}r^3 + C}\Bigg|_a^b = Q_b - Q_a.$$

Die Ladung Q_b, die die Feldstärke $E_{(b)}$ auch elektrostatisch erzeugen würde, ist also gleich der Summe aus der Ladung $Q_{(a)}$, die die Feldstärke $E_{(a)}$ erzeugt und der Raumladung im Raum zwischen den Oberflächen $4\pi b^2$ und $4\pi a^2$.

Erst wenn die Ladungen Q_b und Q_a gleich sind, wenn also keine Raumladung vorhanden ist, haben wir den elektrostatischen Fall. Es muß also sein

$$4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{I}{\beta}b^3 + C} = 4\pi\varepsilon_0\sqrt{\frac{I}{\beta}a^3 + C}.$$

Dies ist nur dann erfüllt für ein $b \neq a$, wenn entweder $I \to 0$ oder C so groß ist, daß $b^3 I/\beta$ bzw. $a^3 I/\beta$ gegen C vernachlässigt werden können.

Denken wir die Feldstärken $E_{(b)}$ und $E_{(a)}$ elektrostatisch erzeugt durch die entsprechenden Oberflächenladungen, so bekommen wir eine Potentialdifferenz zwischen den beiden Kugeloberflächen von

$$\Phi_{el}(b) - \Phi_{el}(a) = U^* = \sqrt{\frac{I}{\beta}b^3 + C}/b - \sqrt{\frac{I}{\beta}a^3 + C}/a. \qquad (41)$$

Nun hatten wir aber für die Strömung bei der zweiten Integration S. 442 gleich zu Anfang die Gleichung:

$$U = \Phi_{(b)} - \Phi_{(a)} = -A^{1/3}\sqrt{C}\left(-\frac{\sqrt{t^3+1}}{t}\right)\Bigg|_a^b + \frac{3}{2}\int_a^b \frac{t\,dt}{\sqrt{t^3+1}}.$$

Nach Rückgängigmachen der Substitutionen wird daraus

$$U = \Phi_{(b)} - \Phi_{(a)} = \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} b^3 + C}}{b} - \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} a^3 + C}}{a} - \int_a^b \frac{\varrho^{(r)}}{\varepsilon_0} r\, d\, r$$

$$U = U^* - \int_a^b \frac{\varrho^{(r)}}{\varepsilon_0} r\, d\, r. \tag{42}$$

Wir bekommen also bei der unipolaren Strömung für die sich einstellende Potentialdifferenz gegenüber der sich aus den gleichen Feldstärken elektrostatisch errechnenden Potentialdifferenz ein Korrektionsglied

$$\int_a^b \frac{\varrho^{(r)}}{\varepsilon_0} r\, d\, r,$$

das der Strömung Rechnung trägt.

Für die reine Strömung ist

$$U^* = \sqrt{\frac{I}{\beta}}\ (\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad \text{und} \quad \int_a^b \frac{\varrho^{(r)}}{\varepsilon_0} r\, d\, r = 3\sqrt{\frac{I}{\beta}}(\sqrt{b} - \sqrt{a}).$$

Die Strömung kehrt also das Vorzeichen der Potentialdifferenz um und verdoppelt den Wert, den sie einnehmen würde, wenn die Feldstärke durch die auf den Flächen $4\pi b^2$ und $4\pi a^2$ befindlichen Ladungen elektrostatisch erzeugt worden wäre.

Die in diesem Fall zwischen den Flächen befindlichen Raumladungen sind:

$$P_{(b,\ a)} = 4\pi\varepsilon_0 \sqrt{\frac{I}{\beta}}\ (\sqrt{b^3} - \sqrt{a^3}).$$

Für $I \to 0$ bzw. $C \to \infty$ geht das Korrektionsglied

$$\int_a^b \varrho / \varepsilon_0 r\, d\, r$$

gegen Null und wir erhalten den elektrostatischen Fall

$$U = U^* = \sqrt{C} / b - \sqrt{C} / a.$$

2. Diskussion der Funktionen und ihre graphische Darstellung.

Da wir uns im Folgenden immer auf einen Kugelkondensator beziehen, bringen wir die Senke der unipolaren Strömung, also die Stelle, an der der Ladungstransport endigt, aus dem Unendlichen auf die äußere Kugelschale des Kugelkondensators. Es wird dann von Vorteil sein, die Werte der einzelnen Funktionen auf die Werte, die sie auf der äußeren Kugelschale $r = b$ annehmen, zu normieren. Anstelle einer Abhängigkeit vom Abstand r von der Quelle, die im Mittelpunkt lagert, bekommen wir damit eine Abhängigkeit des Verhältnisses $F_{(r)} / F_{(b)}$ von dem Verhältnis $R = r/b$. Dabei ist immer $r < b$. An die Stelle der Parameter I und C tritt ein einziger Parameter $c = C \cdot \beta / I \cdot b^3$. Dieser Parameter ist gleich dem

Verhältnis zwischen der von den Oberflächenladungen stammenden Kraftdichte und der Kraftdichte, die von den Raumladungen verursacht ist. Denn wir haben:

$$C = \frac{C \cdot \beta}{I \cdot b^3} = \frac{Q^2 \cdot 6\,\pi\,k\,\varepsilon_0}{(4\,\pi\,\varepsilon_0)^2 \cdot I \cdot b^3} = \frac{Q^2}{2 \cdot 4\,\pi\,\varepsilon_0\,b^2} \cdot \frac{1}{{}^4/_3\,\pi\,b^3} \cdot \frac{4\,\pi\,b^2 \cdot k}{I} =$$

$$= \frac{Q^2}{2 \cdot 4\,\pi\,\varepsilon_0\,b^2} \cdot \frac{1}{{}^4/_3\,b^3\,\pi} \cdot \frac{k}{i_{(b)}} = \frac{E_Q^{(b)} \cdot Q}{2} \cdot \frac{1}{{}^4/_3\,b^3\,\pi} : \frac{i_{(b)}}{k}.$$

Der Parameter C gibt damit an, welche Kraftwirkung überwiegt, entweder diejenige, die von unserm Spezialfall a) (Oberflächenladungen) herrührt, oder die, die dem Spezialfall b) (Raumladungen) entspricht.

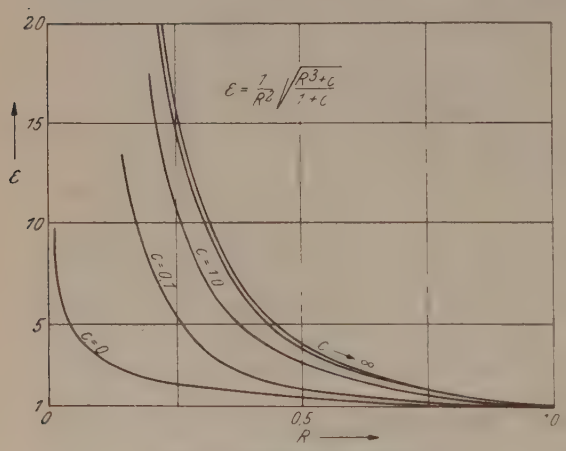


Abb. 7. Normierte Feldstärke.

Normierte Feldstärke. Für $r = b$ ist die Feldstärke nach (5)

$$E_{(b)} = \frac{1}{b^2}\sqrt{\frac{I}{\beta}\,b^3 + C}\,.$$

Auf diesen Wert ist die Feldstärke

$$E_{(r)} = \frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{I}{\beta}\,r^3 + C}$$

zu normieren.

Wir bezeichnen die normierte Feldstärke mit E

$$E = E_{(r)} / E_{(b)} = b^2 \sqrt{\frac{r^3}{b^3} + \frac{C\,\beta}{I\,b^3}} \Big/ r^2 \sqrt{1 + \frac{C\,\beta}{I\,b^3}}\,.$$

Nach Einführung der Variablen $r / b = R$ und des neuen Parameters $C \cdot \beta / I \cdot b^3 \equiv c$ erhalten wir für die normierte Feldstärke:

$$E = 1 / R^2 \cdot \sqrt{(R^3 + c) / (1 + c)}. \tag{43}$$

Den Verlauf von E für verschiedene Parameter c in Abhängigkeit von R stellt die Abb. 7 dar.

Gehen wir von einem $I = 0$ aus. Wir haben dann den rein elektrostatischen Fall, dafür ist $c \to \infty$. Wächst nun I von Null ausgehend, so zeigt sich erst ein merklicher Einfluß auf den Verlauf der Feldstärke ab $c = 1$. Dann ist die Kraftwirkung, die von den Raumladungen ausgeht, so groß geworden, daß sie der von der Oberflächenladung ausgehenden Kraftwirkung gleichkommt. Für $c < 1$ macht sich dann der Einfluß einer Variation von c immer mehr bemerkbar. Für den reinen Strömungsfall, hier ist $c = 0$, nimmt die Feldstärke erst in größerer Entfernung von der Außenkugel, also sehr nahe am Mittelpunkt, merklich zu.

Normierte Leitfähigkeit. Wir normieren die Leitfähigkeit auf die gleiche Art wie oben und bezeichnen sie mit Λ.
Wir bekommen

$$\Lambda = \lambda(r) / \lambda(b) = \sqrt{(1+c)/(R^3+c)}. \tag{44}$$

Das Verhalten der normierten Leitfähigkeit ist in Abb. 8 dargestellt.

Allein für die reine unipolare Strömung, also für $C = 0$ und damit auch für $c = 0$, wird die Leitfähigkeit im Nullpunkt unendlich, während jede elektrostatische Oberflächenladung die Leitfähigkeit im Nullpunkt[1] endlich werden läßt.

Nimmt die Komponente der Kraftdichte, die durch die Oberflächenladung verursacht ist, gegenüber der Strömungskomponente zu, dann haben wir im Kondensator mit Annäherung an die innere Belegung bereits bei $c = 0.1$ kaum noch eine Zunahme der Leitfähigkeit. Beschränken wir uns darauf, den Abstand zwischen den beiden Belegungen des Kondensators relativ klein zu machen, es bleibt damit R in der Nähe von 1, so haben wir kaum noch einen Einfluß auf die Variation der Leitfähigkeit durch eine Variation von I bzw. C. Geht der Strom gegen Null bzw. wird die elektrostatische Ladung des Kondensators so groß, daß wir den Strom ihr gegenüber vernachlässigen können, dann wird die Leitfähigkeit im ganzen Raum annähernd konstant und schließlich Null.

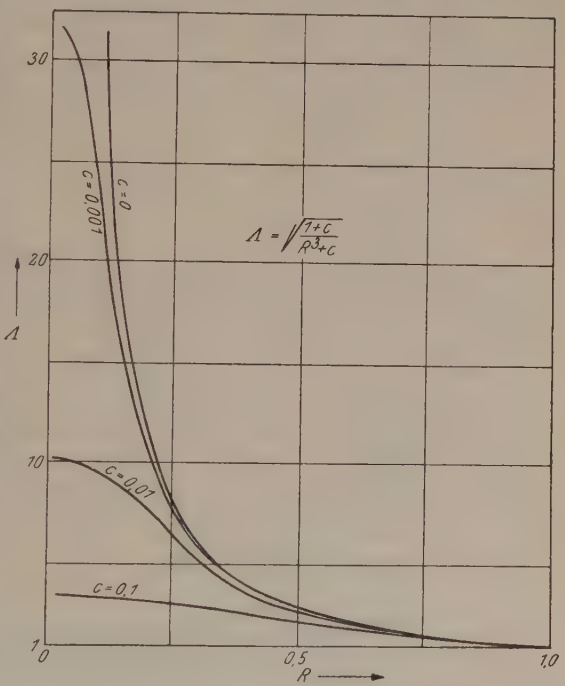


Abb. 8. Normierte Leitfähigkeit.

[1] Im Realfall eines kugelförmigen Kollektors mit seiner „Reichweitekugel" erreichen wir natürlich niemals den Nullpunkt. Dies macht aber keine grundsätzlichen Schwierigkeiten: Da der reale Kollektor an der Oberfläche seiner Reichweitekugel eine endliche Stromdichte hat, können wir die Strömung so behandeln, als käme sie vom Mittelpunkt des Kollektors. Ebenso läßt sich der Fall einer Oberflächenladung behandeln: Wir können uns eine auf einen Leiter aufgebrachte Oberflächenladung in dessen Mittelpunkt als Punktladung vereinigt denken, ohne daß sich die Wirkung ändert.

Für eine Untersuchung, wie sich eine Variation der Parameter I und C im einzelnen auf die Funktionen auswirkt, eignen sich die ursprünglichen Funktionen besser als ihre Normierungen.

Abhängigkeit der Feldstärke von I und C. Abb. 9 zeigt nach Formel (25) die Feldstärke als Funktion des Abstandes r; als Parameter dienen I und C. Für sehr kleine r münden die Feldstärkekurven in die Kurven für $I = 0$ ein, während sie für große r in die Kurven für $C = 0$ einmünden. Dies

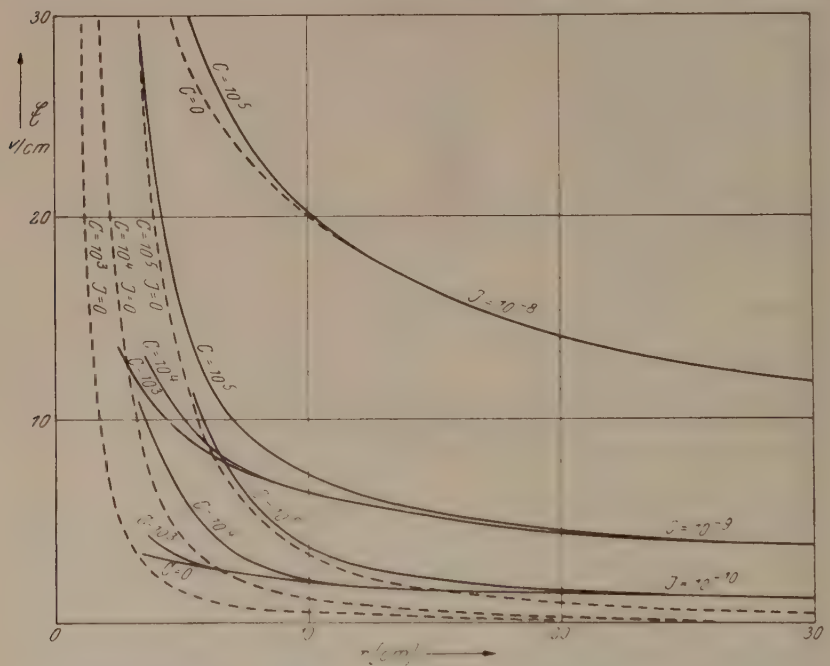


Abb. 9. Feldstärke in Abhängigkeit vom Abstand r von der Quelle. I und C als Parameter.

entspricht ganz unserer Modellvorstellung: Für kleine r überwiegt der Einfluß der durch die Oberflächenladung erzeugten Feldstärke, während für große r die dahinter liegende Raumladung so groß wird, daß ihre Wirkung die Wirkung der Oberflächenladung übertreffen kann.

Abhängigkeit der Leitfähigkeit von I und C. Abb. 10 zeigt die Leitfähigkeit nach der Formel (27) als Funktion vom Abstand r mit den Parametern I und C. Der Kurvenverlauf zeigt, daß für hohe Werte von r die vorgegebene Variation von C auf eine Änderung der Leitfähigkeit keinen Einfluß hat, daß also C sehr viel mehr variiert werden muß, um eine Abweichung der Kurven voneinander zu bekommen. (Es entspricht hier ein $C = 10^4$ z. B. einer Oberflächenladung von $8{,}8 \cdot 10^{-10}$ Coulomb, C = 10^5 dem 3,16fachen).

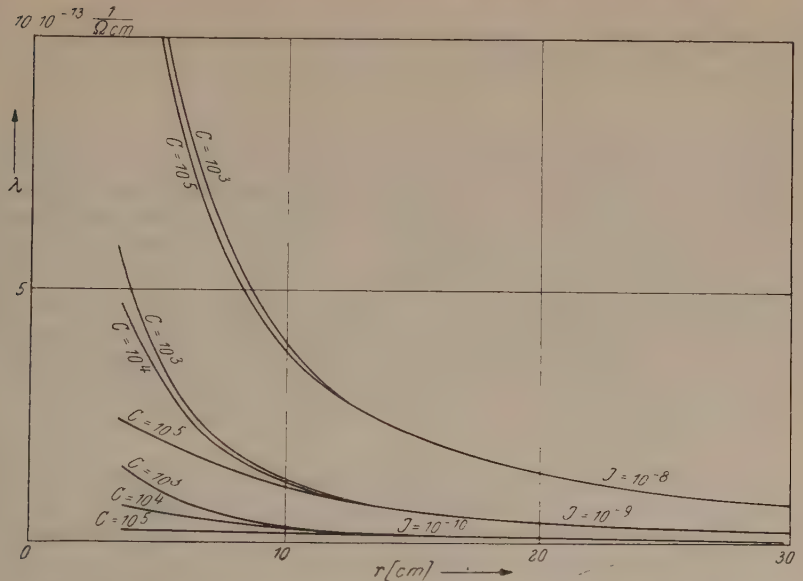


Abb. 10. Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Abstand r von der Quelle. I und C als Parameter.

Diskussion der Potentialfunktion. In der Potentialfunktion (33) sind zwei Terme zu unterscheiden:

$$T_1 = -\frac{\sqrt{\frac{I}{\beta}\, r^3 + C}}{r} \cdot \frac{2\sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}}\, r - (1+\sqrt{3})}{\sqrt[3]{\frac{I}{\beta \cdot C}}\, r + 1 + \sqrt{3}}$$

und $$T_2 = -3\sqrt[4]{3}\ \sqrt[3]{\frac{I}{\beta}}\ \sqrt[6]{C}\ \left(E(k,\varphi) - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\, F(k,\varphi)\right).$$

Es ist zu untersuchen, wie sich diese beiden Terme verhalten, wenn entweder die Variable r oder die beiden Parameter I und C gegen beliebig große oder beliebig kleine Werte gehen.

Wir haben folgende Fälle zu unterscheiden:

$\alpha)$ $r \to \infty$ $\quad$ $\beta)$ $r \to 0$

$\gamma)$ $I \gg C$ $\quad$ $\delta)$ $I \ll C$.

$\alpha)$ $r \to \infty$

Der Term T_2 fällt weg, wenn r gegen Unendlich geht. Im Term T_1 geht der zweite Faktor gegen den Wert 2, während der erste Bruch gegen Unendlich geht. Das Potential geht also mit r gegen Unendlich.

Zum gleichen Ergebnis kommen wir in der Reihenentwicklung: Für $r \to \infty$ wird auch Ar^3 unendlich und in der Reihendarstellung (34) geht die unendliche Reihe gegen Null. Es bleibt damit

$$\Phi_{(r)} = -2\sqrt{I/\beta}\ \sqrt{r}\,.$$

Für $I \neq 0$ geht dies mit r gegen — Unendlich. Die Potentialfunktion wird also für sehr große r nur von der Strömung getragen.

β) $\underline{r \to 0}$

Hier geht φ gegen den Grenzwert $\arccos(1-\sqrt{3})/(1+\sqrt{3})$. Der Term T_2 ist beschränkt für alle C und I ungleich Null. Dagegen geht im Term T_1 der zweite Bruch gegen —1. Das Potential wird daher für sehr kleine r positiv; es wird, da $r^3 I/\beta \to 0$ nur noch von C getragen und geht mit r gegen Null gegen den Wert + Unendlich.

In der Reihenentwicklung (34) gilt dann der Fall $A r^3 < 1$. Die unendliche Reihe geht gegen Null, während $+\sqrt{C}/r^2$ gegen + Unendlich geht und mit ihm das Potential. Wir sehen auch hier, daß das Potential für sehr kleine r nur noch von der Oberflächenladung C getragen wird.

γ) $\underline{I \gg C}$ (r endlich)

Es erübrigt sich, den Verlauf der endgültigen Funktion zu betrachten, denn wir können in der Ausgangsfunktion für die Feldstärke (25) das zweite Glied unter der Wurzel gegenüber dem ersten vernachlässigen und bekommen dann den Fall der „reinen Strömung" ($C = 0$).

Das gleiche ergibt sich aus den Reihenentwicklungen: Für $I \to \infty$ haben wir die $A r^3 > 1$ entsprechende Reihenentwicklung (34) zu wählen. Die unendliche Reihe rechts geht bei endlichem r und C mit unendlich werdendem I gegen Null und es bleibt:

$$\Phi_{(r)} = -2\sqrt{I/\beta} \cdot \sqrt{r}$$

die Potentialfunktion für den Fall der „reinen Strömung", die mit unendlich werdendem I gegen — Unendlich geht.

δ) $\underline{I \ll C}$ (r endlich)

Wir vernachlässigen in der Ausgangsfunktion für die Feldstärke (25) das erste Glied gegenüber dem zweiten und erhalten nach der Integration die Potentialfunktion für Oberflächenladungen

$$\Phi_{(r)} = \sqrt{C}/r$$

Bei der Reihenentwicklung (34) haben wir den Fall $A r^3 < 1$; die unendliche Reihe rechts geht mit A gegen Null, es bleibt

$$\Phi_{(r)} = \sqrt{C}/r$$

Wir haben damit ein jedesmal die Potentialfunktion für den elektrostatischen Fall erhalten.

Das Ergebnis dieser Grenzbetrachtungen ist, daß die Potentialfunktion (37) im Grenzübergang die in der Reihenentwicklung enthaltenen Werte annimmt.

Graphische Darstellung der Potentialfunktion. In der Abb. 11 ist die Potentialfunktion in Abhängigkeit von r mit I und C als Parameter in einer Reihe von Kurvenscharen aufgetragen. Dabei sind als gestrichelte Kurven

jeweils die Kurven $C = 0$ bzw. $I = 0$ eingezeichnet. Aus dem Kurvenverlauf ist zu ersehen, daß für sehr große r die Potentialfunktion in die Grenzkurve $C = 0$ einmündet. Das Potential wird für große r von I allein getragen. Dagegen mündet für kleine r die Potentialfunktion in die Kurve $I = 0$ ein, das Potential wird also für kleine r allein von C bestimmt.

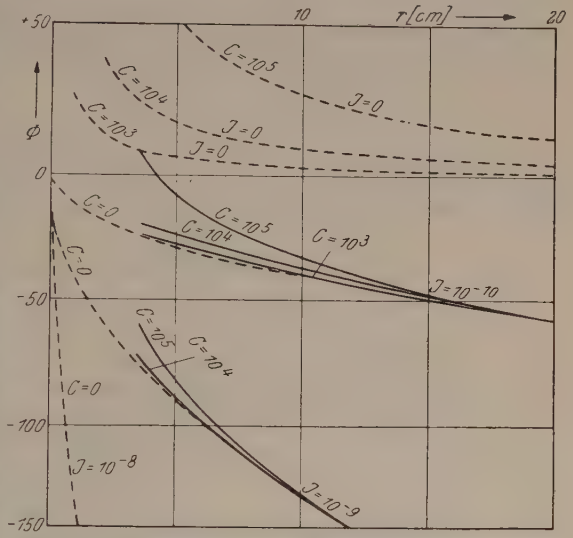


Abb. 11. Die Potentialfunktion Φ in Abhängigkeit vom Abstand von der Quelle für verschiedene I und C.

Graphische Darstellung der Potentialdifferenzen. Beziehen wir uns auf die Kurvenscharen der Abb. 11 mit den realen Dimensionen unseres oben genannten Kugelkondensators, also der Reichweitekugel als innere Kugelschale mit dem Radius a und der äußeren Kugel mit dem Radius b, so legen wir damit bestimmte r fest und können für diese bestimmten $r = a$ bzw. $r = b$ den Verlauf der Potentialfunktion in Abhängigkeit von I und C untersuchen. Besser erscheint es, sich auf eine Funktion zu beziehen, die im Experiment reproduzierbar ist: Wir untersuchen den Verlauf der Potentialdifferenzen, also der Spannung, die sich zwischen den beiden Kugelschalen ergibt, in Abhängigkeit von verschiedenen Strömen I mit C als Parameter. Dies ist in Abb. 12 dargestellt. Hierin ist nach Art der Stromspannungscharakteristiken, wie man sie z. B. für Plattenkondensatoren in einer Reihe

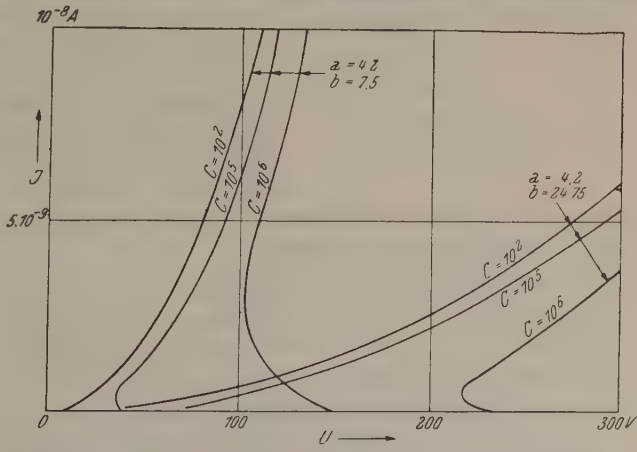


Abb. 12. Strom I in Abhängigkeit von der an einem Kugelkondensator mit den Kugelradien b und a anliegenden Spannung U, für verschiedene C berechnet und für $b = 7{,}5$ cm, $a = 4{,}2$ cm und $b = 24{,}75$ cm, $a = 4{,}2$ cm.

von Arbeiten aus der Physik der unselbständigen Gasentladungen aufgenommen hat (siehe dazu [2], [6], dort auch weitere Literaturangaben), in Abhängigkeit von Strom die am Kondensator liegende Spannung mit verschiedenen C als Parameter errechnet. Wir haben zwei Kurvenscharen, die steilere ist berechnet für einen Kondensator mit $a = 4{,}2$ cm und $b = 7{,}5$ cm und die weniger steile Kurvenschar für einen Kondensator mit $a = 4{,}2$ cm und $b = 24{,}75$ cm.

Das Auffallende an diesen Kurvenscharen ist, daß wir für alle Kurven, die einem $C \pm 0$ entsprechen, ein Gebiet haben, in dem von sehr kleinen Strömen ausgehend, mit steigendem Strom die Spannung sinkt.

III. Theorie und Experiment.

1. Versuchsanordnung.

Es wurde die Stromspannungscharakteristik einer mit Polonium aktivierten Nickelkugel in einem Kugelkondensator aufgenommen. Dazu diente folgende Versuchsanordnung (siehe Schaltskizze in Abb. 13):

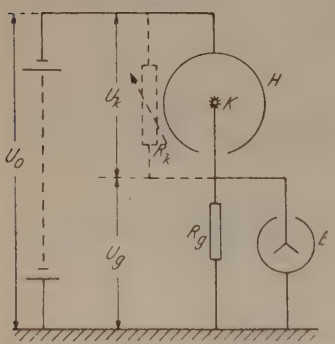


Abb. 13. Schaltskizze zur Aufnahme der Stromspannungscharakteristik in einem Kugelkondensator.

Als radioaktiver Kollektor K wurde eine Nickelkugel mit 0,4 cm Radius gewählt, auf der 0,5 cm Curie Radiumäquivalent reinen Poloniums elektrochemisch abgeschieden waren. Ein mechanischer Schutzüberzug wurde nicht auf die Kugel aufgebracht, so daß mit der vollen Reichweite der α-Strahlen von 3,89 cm zu rechnen war. Die aktivierte Kugel befand sich im Mittelpunkt einer leitenden dünnwandigen Hohlkugel H mit dem Radius 7,5 cm bzw. 24,75 cm. Die Oberfläche der Reichweitekugel, also des bipolaren Gebiets um den Kollektor, betrachten wir als Leiteroberfläche. Damit bildet diese leitende Kugel mit der sie umgebenden Außenkugel einen Kugelkondensator.

An diesen Kugelkondensator wurde eine von 0—2000 Volt variierbare Spannung U_0 gelegt. Als Spannungsquelle dienten: für 0—500 V Anodenbatterien, für 700—2000 V ein hochstabilisierter Gleichspannungsgenerator. Die Innenelektrode, also der Kollektor, wurde über einen Meßwiderstand R_g von ca. 10^9 Ohm an Erde gelegt.

Mit einem Einfadenelektrometer E wurde der Spannungsabfall an dem Meßwiderstand R_g, den der von der Außenkugel über den leitfähigen Innenraum, Kollektor und Meßwiderstand nach Erde fließende Strom erzeugt, gemessen. Die Differenz zwischen außenanliegender Gesamtspannung U_0 und diesem Spannungsabfall U_g ergibt den Spannungsabfall im Kugelkondensator U_k, also längs der Gasentladungsstrecke des Kollektors.

2. Vergleich der Meßergebnisse mit den theoretischen Kurven.

In Abb. 14 sind die oben erhaltenen Meßpunkte in die nach der Formel (36) berechneten Kurvenscharen eingetragen.

Für kleine Spannungen liegen die Meßpunkte mit genügender Genauigkeit auf den theoretischen Kurven $C = 0$. Es gelten damit für kleine

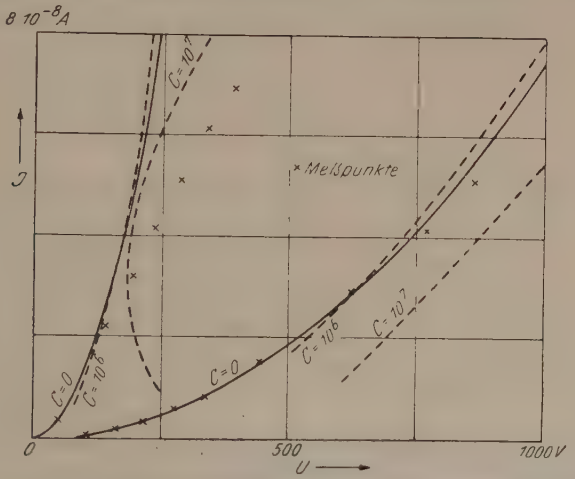


Abb. 14. Berechnete Stromspannungscharakteristik mit eingetragenen Meßpunkten.

Spannungen die Gesetze der reinen Strömung. Mit andern Worten: Für kleine Spannungen am Kondensator überwiegt die von den „zurückliegenden", d. h. der Quelle näher liegenden Ladungen ausgeübte Kraftwirkung die der Oberflächenladungen so stark, daß man die zweite gegen die erste vernachlässigen kann. Es müssen also für kleine Spannungen nur sehr wenige Oberflächenladungen vorhanden sein.

Aus der Gleichung (42) wird

$$U = -2\sqrt{I/\beta}\,(\sqrt{b} - \sqrt{a})\,.$$

Dies nach I aufgelöst, ergibt

$$I = \frac{3}{2}\,\frac{\pi\,\varepsilon_0\,k}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2}\,U^2. \tag{45}$$

Im Gebiet des „Anlaufstroms" ist also der Strom dem Quadrat der Spannung proportional.

Je größer die Außenkugel des Kugelkondensators ist, auf desto größere Spannungen erstreckt sich das Gebiet, in dem die quadratische Abhängigkeit des Stroms von der Spannung in Näherung gilt.

Mit größer werdenden Spannungen treten Abweichungen von obigem Gesetz auf. Die Stromspannungscharakteristik läuft quer durch die Kurvenscharen für $C \pm 0$. Das Quadrat der Spannungszunahme $(\Delta U)^2$ ist also nicht mehr proportional der Stromzunahme ΔI, sondern einer Zunahme $\Delta I + \Delta C$ von I und C zusammen. In dem Maß, wie für ein bestimmtes

$(\Delta U)^2\ \Delta I$ abnimmt, nimmt das ΔC zu. In der Gleichung (42) mit (41)

$$U = \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} a^3 + C}}{a} - \frac{\sqrt{\frac{I}{\beta} b^3 + C}}{b} - \int_a^b \frac{\varrho}{\varepsilon_0} r\, dr$$

bzw. $$U + \Delta U = \frac{\sqrt{\frac{I + \Delta I}{\beta} a^3 + C + \Delta C}}{a} - \frac{\sqrt{\frac{I + \Delta I}{\beta} b^3 + C + \Delta C}}{b} - \int_a^b \frac{\varrho + \Delta \varrho}{\varepsilon_0} r\, dr$$

wird ΔC gegenüber ΔI immer größer. Damit nimmt

$$\Delta \varrho = \frac{1}{4\pi k \sqrt{\frac{1}{(I + \Delta I)\beta} r^3 + \frac{C + \Delta C}{(I + \Delta I)^2}}}$$

von dem Augenblick, wo $\Delta C > (\Delta I)^3$ ist, immer stärker ab. Das Korrektionsglied $\int_a^b \frac{\varrho}{\varepsilon_0} r\, dr$ verliert gegenüber U^* immer mehr an Gewicht. Das Wachsen von U ist schließlich nur noch durch ein Wachsen von C bedingt.

Es kann damit U für ein beschränktes I (Sättigungsstrom!) nur dann beliebig wachsen, wenn C beliebig wächst und schließlich gegen Unendlich geht. Dann geht die Raumladung gegen Null, und wir haben den elektrostatischen Fall

$$U = U^* = \sqrt{C}\ (1/a - 1/b).$$

Hierbei sitzen die Ladungen nur noch auf den Kugeloberflächen mit den Radien a und b.

IV. Darstellung der Wirkungsweise des radioaktiven Kollektors in Analogie zur Elektronenröhre.

Die Tatsache, daß die Stromspannungscharakteristik im *Anlaufstromgebiet* der quadratischen Abhängigkeit (45) gehorcht und für größere Spannungen die Kurvenschar $C \neq 0$ durchläuft, gibt Anlaß, die unselbständige Gasentladungsstrecke des Kollektors analog der Betrachtungsweise einer Elektronenröhre darzustellen. (Zum Folgenden siehe nochmals die Abb. 13 mit dem gestrichelt eingezeichneten veränderlichen Kollektorwiderstand R_k.)

Die Außenspannung U_o soll repräsentiert werden durch den meßbaren Spannungsabfall U_g, der sich längs des Meßwiderstandes R_g ergibt. Von den beiden Widerständen R_k und R_g der Spannungsteilung ist R_k von der an ihm liegenden Spannung abhängig. (Im Folgenden wird der Widerstand der Gasentladungsstrecke des Kollektors statt mit $R_{ü}$ mit R_k — also Kollektorwiderstand, — bezeichnet.)

Es ist

$$U_0 = U_g \cdot (1 + R_k / R_g).$$

Die Spannung am Meßwiderstand U_g repräsentiert um so genauer die Außenspannung U_o, je kleiner das Verhältnis R_k/R_g ist, also je größer R_g ist. Dann machen sich Änderungen von R_k, die durch die Spannungsabhängigkeit bedingt sind, um so weniger bemerkbar. Dies wird auch in der graphischen Darstellung der Abb. 15 erläutert.

Der Widerstand R_g stellt sich graphisch in der Form einer *Widerstandsgeraden* dar. Der Cotangens des Neigungswinkels dieser Widerstandsgeraden gegen die U-Achse ist gleich R_g. Ist R_g klein, so ist die Widerstandsgerade steil, ist R_g groß, so ist die Widerstandsgerade flach.

Die Widerstandsgerade ergibt für ein bestimmtes I den Spannungsabfall, den dieses I längs R_g erzeugt. Da ein Ende von R_g auf Nullpotential liegt, geht die Widerstandsgerade in unserm Fall vom Nullpunkt der graphischen Darstellung aus. Die Charakteristik dagegen liegt mit einem Ende auf dem Potential U_o und geht deshalb von U_o aus. Der Schnittpunkt der Widerstandsgeraden mit der Charakteristik des Kollektorwiderstands führt zum Begriff des *Arbeitspunktes A*. Die Projektion der Charakteristik auf die U-Achse ist gleich der Spannung am Kollektor U_k. Eine Änderung von R_g stellt sich graphisch als Drehung der Widerstandsgeraden dar und eine Änderung der Außenspannung U_o als Parallelverschiebung der Charakteristik R_k.

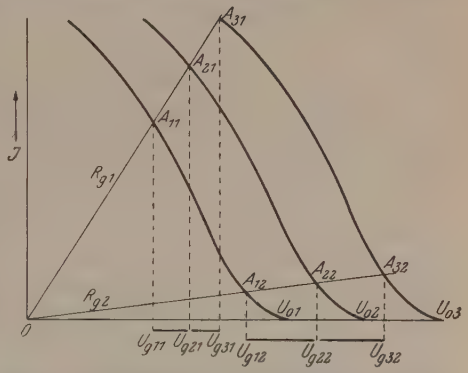


Abb. 15. Abhängigkeit der Aufnahme der Stromspannungscharakteristik von einer Variation des Meßwiderstandes R_g und Repräsentation von Schwankungen der Außenspannung U_o durch Schwankungen der Meßspannung U_g.

Wir betrachten die Variation von U_g bei einer Variation von U_o für verschiedene R_g.

a) Der Meßwiderstand R_{g1} ist klein. Der Kollektor ist hoch belastet. Der Hauptspannungsabfall liegt am Kollektorwiderstand R_k. Die Schwankungen ΔU_g sind wesentlich kleiner als die Schwankungen ΔU_o, dagegen sind die $\Delta U_k > \Delta U_g$. Außerdem ist $U_{g31} - U_{g21} < U_{g21} - U_{g11}$ d. h. die Schwankungsamplituden werden nicht getreu abgebildet, wir haben *nichtlineare Verzerrungen.*

b) Der Meßwiderstand R_{g2} ist groß. Der Kollektor ist gering belastet. Am Kollektorwiderstand liegt nur noch eine geringe Spannung. Die Schwankungen ΔU_g nähern sich immer mehr den Schwankungen ΔU_o.

Betrachten wir schließlich den Einfluß von Variationen von R_g auf die Variationen ΔU_g, so bewegen wir die Widerstandsgerade auf den Charakteristiken des Kollektors hin und her. Es wird hier von Vorteil sein, anstelle des Widerstands $R_k \equiv U/I$ (*Gleichstromwiderstand* $R = U_a/I_a$ *einer Röhre*) die Cotangente an die Charakteristik im Arbeitspunkt $R_k = \Delta U/\Delta I$ (*Wechselstromwiderstand* $R_i = \Delta U_a/\Delta I_a$ *einer Röhre*) einzuführen.

D. Der radioaktive Kollektor im homogenen Feld.

Die vorausgehenden Untersuchungen gelten für eine kugelsymmetrische unipolare Strömung im kugelsymmetrischen Feld. Um die Ergebnisse auf das luftelektrische Feld anwenden zu können, ist es nötig, die Theorie auf eine Dipolströmung im homogenen Feld zu erweitern. Diese Erweiterung soll nur qualitativ in Form von Näherungsbetrachtungen durchgeführt werden, da die quantitative Behandlung wegen des erforderlichen mathematischen Aufwands den Rahmen der vorliegenden Arbeit überschreitet.

1. Dipolströmung im homogenen Feld.

Bringen wir einen radioaktiven kugelförmigen Kollektor in ein homogenes Feld, so geschieht folgendes: Die α-Strahlen schaffen innerhalb ihrer Reichweitekugel ein Gebiet, in dem Ladungen beider Vorzeichen entstehen und teilweise durch Wiedervereinigung gleich wieder verschwinden. Aus diesem bipolaren Gebiet treten durch die Wirkung des homogenen Außenfeldes die Ladungen und laufen getrennt nach Vorzeichen in zwei Halbräumen gegen die Kondensatorplatten, die negativen Ionen laufen längs der Feldlinien auf die positiv geladene Platte und umgekehrt.

Der Vorgang läßt sich als Strömung einer im Kollektor liegenden Dipolquelle darstellen. Den Quellen entsprechen ihre an den Kondensatorplatten gespiegelten Bildpunkte als Senken. Wir wollen eine „negative" Strömung, entsprechend einem Transport negativer Ladungen, und eine „positive" Strömung unterscheiden. Die Abstände zwischen Quelle und Senke der einzelnen Strömungen richten sich nach der Lage des Kollektors im Plattenkondensator, sie sind nur gleich, wenn der Kollektor sich genau in der Mitte befindet. Zu unserm Zwecke betrachten wir ein Modell, in dem der Kollektor in der Nähe der negativen Platte (Erde!) liegt, wie es bei der Messung des luftelektrischen Potentialgefälles immer der Fall ist.

Die Senken sind fiktive Bildpunkte und dienen lediglich der mathematischen Behandlung. Im Realfall endet die negative Strömung auf positiven Oberflächenladungen der Kondensatorplatte. Daher entsprechen Oberflächenladungsdichte und Strömungsdichte einander. Die Dichte der Stromlinien nimmt vom Strömungszentrum an nach außen ab. Die gleiche Verteilung müßten die Oberflächenladungen einnehmen. Da die Kondensatorplatte ein Leiter ist, müssen sich aber die Oberflächenladungen gleichmäßig verteilen.

Ist zwischen den beiden Kondensatorplatten eine feste Spannung vorgegeben und damit eine Zwangsbedingung eingeführt, so entspricht dieser Spannung eine feste, gleichmäßige Oberflächenladungsverteilung auf den Platten. Nach dieser Oberflächenladung stellt sich die Strömung so ein, daß die Ladungen der Strömung im Zentrum die entsprechenden Oberflächenladungen gerade kompensieren, während außerhalb des Strömungszentrums sich ein Überschuß der Oberflächenladungen einstellt, der mit größer werdendem Abstand vom Strömungszentrum immer größer wird. Dieser Überschuß der Oberflächenladungen auf beiden Kondensatorplatten ergibt ein zusätzliches Außenfeld. Dieses Außenfeld überwiegt in größerem Abstand vom Strömungszentrum das Feld der unipolaren Strömungen.

Da die Quellen der beiden Strömungen gleiche Ergiebigkeit haben und die beiden Strömungen durch Ladungen verschiedener Vorzeichen getragen werden, ist die Summe der Ströme, die vom Kollektor ausgehen, Null: Der Kollektor ist *unbelastet*. Für den unbelasteten radioaktiven Kollektor in der Nähe der negativen Platte ergibt sich damit das Strömungsbild der Abb. 16a.

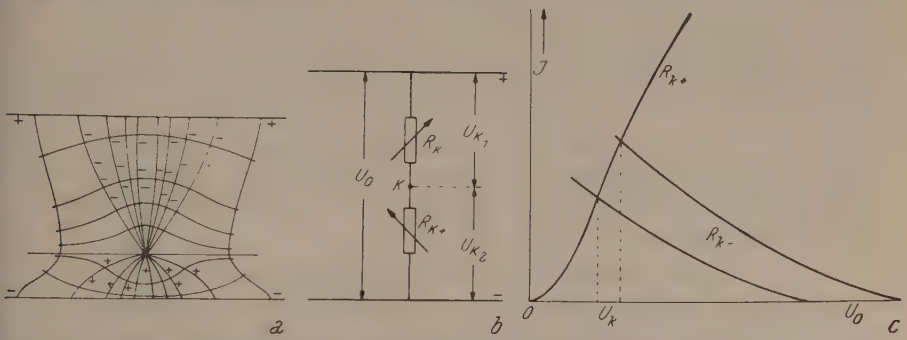


Abb. 16. Unbelasteter Kollektor im homogenen Feld. a) Strömungsbild, Kollektor in der Nähe der negativen Platte. b) Ersatzschaltbild. c) Charakteristikendarstellung.

Die den beiden Strömungen entsprechenden Widerstände sind nichtohmisch, so daß sich der unbelastete Kollektor im homogenen Feld mit dem Ersatzschaltbild der Abb. 16b darstellen läßt.

Um die früher verwendeten Stromspannungscharakteristiken und mit ihnen alle Gesetze der unipolaren kugelsymmetrischen Strömung im kugelsymmetrischen Feld auf unsern Fall anwenden zu können, ohne eine mathematische Behandlung, bedarf es einer Näherungsbetrachtung.

2. Näherungsbetrachtung.

Wir können einen Teil der Äquipotentialflächen in Abb. 16a in Näherung als Teil einer Kugeloberfläche, d. h. als Kugelkalotte betrachten. Diese Näherung gilt für einen Sektor des Halbraums mit dem Raumwinkel ω. Diese Kugelkalotte bildet mit dem entsprechenden Teil der Oberfläche der Reichweitekugel einen Teil eines Kugelkondensators. In diesem Teil des Kugelkondensators gelten die Gesetze der unipolaren kugelsymmetrischen Strömung im kugelsymmetrischen Feld. Beziehen wir uns auf diese Gesetze und betrachten z. B. eine Stromspannungscharakteristik nach Art der in Abb. 14 durch die Meßpunkte repräsentierten, so werden sich die Ströme in dem Teilkugelkondensator auf Werte reduzieren, die dem Verhältnis des Raumwinkels ω des betrachteten Sektors zum Raumwinkel einer gesamten Kugel, also 2π, entsprechen. Ist z. B. $\omega/2\pi = 1/10$, so werden sich die Ströme auf ein Zehntel reduzieren und wir bekommen eine Stromspannungscharakteristik, die wesentlich flacher verläuft als die ursprüngliche, die für die gesamte Kugel galt. Durch diesen Raumwinkel ω bekommen wir ein Maß, mit dem wir die zu verwendenden Stromspannungscharakteristiken konstruieren können, um mit ihrer Hilfe dann qualitative Aussagen über die sich einstellenden Verhältnisse machen zu können.

3. Der unbelastete Kollektor im homogenen Feld.

Für unsern Fall (Kollektor in der Nähe der Platte mit dem negativen Potential), bekommen wir die graphische Darstellung der Abb. 16c. Die Charakteristik für die positive Strömung ist steiler als die Charakteristik für die negative Strömung, da bei der ersten die Außenkugel näher beim Kollektor ist (Meßpunkte links in der Abb. 14) wie bei der zweiten (Meßpunkte rechts).

Für den Fall, daß der Kollektor sich in der Mitte zwischen beiden Kondensatorplatten befindet, hat die Charakteristik R_{K-} die gleiche Steilheit wie R_{K+}.

Aus der Abb. 16c ist zu ersehen, daß der unbelastete Kollektor ohne Verzögerung Schwankungen der Außenspannung folgt und dabei das Verhältnis der Spannung, die er gegen die negative Platte hat, zur Gesamtaußenspannung immer das gleiche bleibt.

4. Der belastete Kollektor im homogenen Feld.

Hier ändern sich die Verhältnisse gegenüber dem unbelasteten Kollektor. Die positive Strömung ist nicht mehr gleich der negativen, sondern wird kleiner als sie. Der Differenzbetrag, um den die beiden Strömungen sich unterscheiden, fließt über einen Meßwiderstand bzw. über die endliche Isolation ab. Im Ersatzschaltbild der Abb. 16b tritt an die Stelle des Widerstands der positiven Strömung R_{K+} eine Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands mit dem nichtohmschen Widerstand der positiven Strömung. Analog zur Abb. 16a bekommen wir das Schnittbild der Abb. 17. Die Äquipotentialflächen für die negative Strömung schmiegen sich mehr der Oberfläche des Kollektors an. Dementsprechend wird der Raumwinkel größer als für den unbelasteten Kollektor. Also muß auch die Charakteristik für die negative Strömung steiler werden. Das Umgekehrte gilt für die positive Strömung. Ihre Charakteristik wird flacher, und zwar um so flacher, je mehr sich die negative Strömung von der positiven unterscheidet, also je größer der Strom ist, der über den Meßwiderstand R_g abfließt. Der Strom und damit die Belastung des Kollektors wird dann größer, wenn der Meßwiderstand R_g kleiner wird.

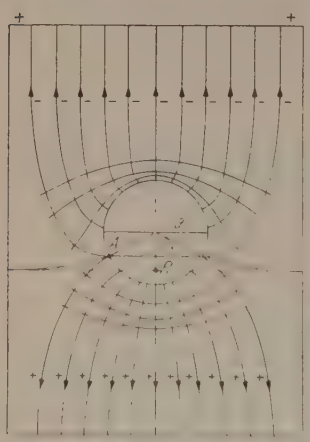


Abb. 17. Strömungsbild des unbelasteten Kollektors im homogenen Feld. Kollektor im Zentrum. A Ausgleichspunkt mit Oberflächenladung Null. R Referenzpunkt.

Zur Untersuchung des belasteten Kollektors mittels der Stromspannungscharakteristiken bedarf es einer graphischen Konstruktion der aus der Parallelschaltung von ohmschem und nichtohmschem Widerstand resultierenden Stromspannungscharakteristik R_{res}. Diese Konstruktion sei hier weggelassen, da sie für unser Problem nichts beiträgt.

Wesentlich ist, daß der nichtohmsche Widerstand R_{K+} immer größer

wird, je kleiner der Meßwiderstand R_g gewählt wird. Je größer aber R_{K+}, desto flacher wird die Charakteristik, und je kleiner R_g, desto steiler wird die Widerstandsgerade. Bei sehr großem R_g ist R_{res} nur sehr wenig steiler als R_{K+}. Mit Kleinerwerden von R_g wird der Beitrag von R_{K+} zu R_{res} immer geringer und bei sehr kleinem R_g ist praktisch $R_{res} = R_g$. Damit ist der Fall des hochbelasteten Kollektors erreicht.

In den Abb. 18a und b sind die Charakteristikendarstellungen eines gering belasteten und eines hoch belasteten radioaktiven Kollektors einander gegenübergestellt.

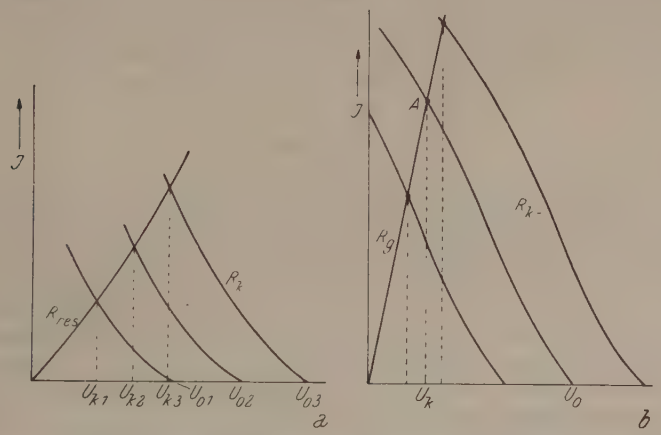


Abb. 18. Charakteristikendarstellung des belasteten Kollektors im homogenen Feld. a) Geringbelasteter Kollektor. b) Hochbelasteter Kollektor.

Für den gering belasteten Kollektor hat eine in gewissen Grenzen bleibende Variation von R_g (Änderung der Isolation, Spannungs- und Temperaturabhängigkeit des Meßwiderstandes!) keinen Einfluß auf den resultierenden Widerstand. Der Kollektor zeigt immer die erwartete Spannung an.

Wird die Steilheit der Widerstandsgeraden R_g größer als die mittlere Steilheit der Charakteristik R_{K+}, so wird der Kollektor hochbelastet, die vom Kollektor angezeigte Spannung weicht wesentlich vom Erwartungswert ab und Variationen von R_g wirken sich sehr stark auf die angezeigte Spannung U_K aus. Schließlich erreicht die Widerstandsgerade mit ihrem Arbeitspunkt, je steiler sie wird, immer mehr das Sättigungsgebiet der Charakteristikenscharen R_{K-} und damit werden die Schwankungen ΔU_0 immer weniger getreu durch die Schwankungen ΔU_g repräsentiert. Wir bekommen immer stärkere nichtlineare Verzerrungen.

Schlußbetrachtung.

Eine Messung des luftelektrischen Potentialgefälles mit hoch belastetem Kollektor ist nach dem Vorausgehenden unstatthaft, da die Anzeige des Kollektors falsch ist und zu viele Fehler durch ein Schwanken des Meßwiderstands in die Messung eingehen können.

Eine Untersuchung der Windabhängigkeit kann qualitativ nicht gegeben werden. Hierzu ist zuerst eine mathematische Behandlung der Dipolströmung im homogenen Feld nötig.

Zur endgültigen Beherrschung des Kollektorwiderstandes bei der Messung des luftelektrischen Feldes ist noch zu untersuchen, wie weit längs der Strömung zu integrieren ist, da hier die „positive Platte" fehlt bzw. so weit entfernt ist, daß wir nicht auf sie beziehen können. Dies läuft auf eine Untersuchung hinaus, wie weit die unipolare Strömung des Kollektors gegenüber der bipolaren Strömung im luftelektrischen Feld ins Gewicht fällt.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. ISRAËL für seine freundliche Förderung. Weiter habe ich dem Deutschen Wetterdienst für die Bereitstellung eines Arbeitsplatzes an der Luftelektrischen Forschungsstelle Buchau a. F. und am Meteorologischen Observatorium Aachen zu danken.

Literatur.

1. ISRAËL, H.: Atmosphärische Elektrizität. (Monographie in Vorbereitung.)
2. STÜCKLEN, H.: Die unselbständigen Entladungen zwischen kalten Elektroden. H. Geiger, K. Scheel, Handbuch der Physik, Bd. 14 (1927).
3. BENNDORF, H.: Zur Theorie luftelektrischer Registrierungen. Wiener Berichte IIa, **118**, 1173—1205 (1909).
4. LINKE, F.: Über Messungen von Potentialdifferenzen mittels Kollektoren unter besonderer Berücksichtigung von radioaktiven Substanzen. Physik. Z. **4**, 661 bis 664 (1903).
5. NORINDER, M.: Observations de l'électricité atmosphérique à Vassijaure. Kungl. Svenska Vetenskaps Akad. Handl. **55**, 6 (1916).
6. HANFELD, I.: Untersuchungen über die elektrische Raumladung und das elektrische Feld am Boden. Z. Geophysik **8**, 89—106 (1932).
7. MÜHLEISEN, R.: Zur Methodik der luftelektrischen Potentialmessungen. Einfluß des Windes bei radioaktiven Kollektoren. Z. f. Naturforschung **6a**, 667 bis 671 (1951).
8. WICHMANN, H.: Die Messung des luftelektrischen Feldes mit radioaktiven Potentialsonden. Arch. Met. Geoph. Biokl. A **5**, 86—99 (1952).
9. WIGAND, A., und K. KIRCHER: Schnellwirkende luftelektrische Kollektoren. Gerlands Beitr. Geophys. **17**, 379 (1927).
10. PFLEIDERER, H.: Nach frdl. brieflicher Mitteilung des Verfassers an Herrn Prof. Dr. ISRAËL.
11. ISRAËL, H.: Zur Entwicklung der luftelektrischen Grundanschauungen, Arch. Met. Geoph. Biokl. A **3**, 1—16 (1950).
12. CIALDEA, R., und A. LO SURDO: Sonde radioattive a percorso ridotto. Annali de Geofisica **1**, 49—55 (1948).
13. CIALDEA, R., A. LO SURDO und G. ZANOTELLI: Influenza della carica spaziale sul funzionamento delle sonde radioattive. Annali di Geofisica **1**, 155—163 (1948).
14. CIALDEA, R., A. LO SURDO und G. ZANOTELLI: Influenza del vento sul funzionamento del sonde radioattive. Annali di Geofisica **1**, 491—508 (1948).
15. CIALDEA, R.: Le dimensioni delle sonde radioattive e l'effetto di carica spaziale. Annali di Geofisica **1**, 364—371 (1948).
16. CIALDEA, R., A. LO SURDO und G. ZANOTELLI: Il regime transitorio delle sonde radioattive. Annali di Geofisica **2**, 1—12 (1949).
17. CIALDEA, R., A. LO SURDO und G. ZANOTELLI: La carica delle sonde radioattive in presenza di vento. Annali di Geofisica **2**, 317—327 (1949).

550.342

Untersuchungen über die Bodenunruhe mit Perioden von 4 bis 8 Sekunden.

Von

H. Westerhausen, Hamburg.

Mit 23 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Mit Hilfe von zwei neuen Methoden zur Bestimmung mikroseismischer Erregungszentren ist es möglich, Näheres über die Erregungsursache der Mikroseismik auszusagen. Die hier behandelten Beispiele stützen die Theorie von LONGUET-HIGGINS, die stehende Wellen im Ozean als Ursache mikroseismischer Stürme beschreibt.

Summary. By means of two new methods for determining microseismic stimulation centers it is possible to obtain a deeper insight into the origin of microseismics. The examples treated in this paper are in favour of the theory of LONGUET-HIGGINS describing the stationary waves of the ocean as cause of microseismic storms.

Résumé. Deux nouvelles méthodes de détermination des foyers microséismiques fournissent de plus amples renseignements sur l'origine des microséismes. Les exemples ici traités confirment la théorie de LONGUET-HIGGINS qui attribue les tempêtes microséismiques à des ondes stationnaires des océans.

I. Die Erregungsursachen mikroseismischer Stürme.

In der Frage nach der Erregungsursache der mikroseismischen Unruhe besteht keine Übereinstimmung. Zwar sind sich die meisten Autoren darüber einig, daß die Mikroseismik im engen Zusammenhang mit Stürmen und Tiefdruckgebieten über dem Ozean steht, doch über die Art der Energieübertragung von der Meeresoberfläche zum Ozeanboden bestehen recht verschiedene Auffassungen.

Bevor ich mit der Besprechung meiner Ergebnisse beginne, möchte ich daher noch einmal eine kurze Zusammenstellung einiger Theorien geben, die zur Erklärung der Mikroseismik bestehen.

Eine ältere Theorie, die von WIECHERT gegeben und später von GUTENBERG vertreten wurde, machte die Brandung an steilen Felsenküsten für die Bodenunruhe verantwortlich. Gestützt wurde diese „Brandungstheorie" durch sehr gute Korrelationskoeffizienten zwischen Brandung und Seegang an der norwegischen Küste und der Bodenunruhe in Hamburg und an anderen kontinentalen Stationen. Da aber die Verstärkung der Brandung an der norwegischen Küste immer an die Anwesen-

heit von Tiefdruckgebieten gebunden ist, würde man bei Annahme der Bewegung der Zyklonen über dem Ozean und den Kontinenten als Ursache der Bodenunruhe zu den gleichen Werten kommen. Die Tatsache, daß ein großer Teil der Tiefdruckgebiete schon die Bodenunruhe erregen, wenn sie noch weit von der Küste entfernt über dem Ozean liegen, widerspricht dieser Theorie. VISSER [*15*] stellte für 50 mikroseismische Stürme in De Bilt fest, daß sie mit wohldefinierten Zyklonensystemen im Nordost-Atlantik im Zusammenhang standen. Für küstennahe Stationen wird allerdings ein mehr oder weniger starker Einfluß der Brandung auf die Bodenunruhe nicht von der Hand zu weisen sein.

Eine andere Theorie zur Entstehung der Mikroseismik wurde von GHERZI 1932 [*7*] gegeben. GHERZI nimmt an, daß ein „Pumpen" der Atmosphäre, welches in tropischen Gebieten von Barographen in der Nähe von Tiefdruckzentren registriert wurde, die Ursache der Bodenunruhe bilde. Auch nach Bearbeitung mikroseismischer Stürme amerikanischer Stationen kommt DONN [*5*] zu der Auffassung, daß Pulsationen oder Oszillationen, hervorgerufen durch instabile Bedingungen und Turbulenz in der Kaltluft, die Oberfläche des Meeres erregen und durch irgendeinen Mechanismus auf den Meeresboden übertragen werden. RAMIREZ [*13*] führte dagegen über mehr als ein Jahr einen Vergleich zwischen mikroseismischen und mikrobarometrischen Oszillationen durch und fand weder in der Wellenform, noch in der Gruppenform, der Periode oder der Sturmdauer eine Übereinstimmung der beiden Phänomene. Es scheint, daß diese Art der Erregung wohl in tropischen Zyklonen großer Intensität wirksam sein kann, doch wird dieser Effekt in unseren Breiten kaum einen Einfluß auf die Mikroseismik haben.

PRESS und EWING [*6*] versuchten die Mikroseismik als die Schwingung eines Systems, welches aus einer oberen Wasserschicht und einer homogenen Bodenschicht besteht, zu erklären.

Die Theorie ergab, daß die Perioden der Bodenunruhe von den elastischen Konstanten des Bodens abhängen, mit der Meerestiefe anwachsen und bei einer Meerestiefe von ungefähr 5 km zwischen 3 und 9 sec liegen. Bei Annahme einer geringen Meerestiefe, wie es ja im Bereich der Norwegischen See und der Nordsee der Fall ist, würde sich das Spektrum zu sehr kurzen Perioden verschieben. Die Abhängigkeit der Perioden der Mikroseismik von der Meerestiefe ist noch nicht beobachtet worden. (Vergl. auch BÅTH [*2b*].)

BANERJI [*1*] nimmt an, daß die Energie der Oberflächenwellen des Meeres trotz der exponentiellen Abnahme der Amplituden mit der Tiefe auf den Meeresboden gelangen und dort die Mikroseismik erregen könnte. Er teilt die See in zwei Schichten auf, eine dünne Oberflächenschicht, in welcher die Schwerewellen vorherrschend sind, und in eine untere Schicht, in welcher die Störungen durch einen Kompressionseffekt des Wassers zum Boden weitergeleitet werden. Gegen diese Theorie sprechen verschiedene Tatsachen, vor allem aber die, daß 1. die Wellenperioden, die im allgemeinen im Ozean beobachtet werden, größer sind als die Perioden der mikroseismischen Wellen, und 2. die Wellenlängen

der Ozeanwellen sehr viel kleiner sind als die Wellenlängen der mikroseismischen Wellen und daher die Erregung der Bodenunruhe unter einem größeren Meeresgebiet kaum möglich ist, zumal sich die Druckeffekte unter den einzelnen Schwerewellen gegenseitig aufheben würden.

Bernards [*3*] Untersuchungen in Marokko deuteten zuerst darauf hin, daß die Perioden der Dünung an der marokkanischen Küste ungefähr doppelt so groß sind wie die Perioden der mikroseismischen Wellen. Unabhängige Beobachtungen Deacons [*4*] an der englischen Küste bestätigten diese Tatsache.

In einer „Statistik von Wellenbeobachtungen nordatlantischer Wetterschiffe von 1950—1951" stellt H. U. Roll [*14*] die Beobachtungen von 10 Wetterschiffen zusammen. Er findet für 952 Werte, daß 82% zu Ozeanwellen mit Perioden von 11—13 sec,

15% zu solchen von 13—15 sec und nur

3% zu Wellen mit größerer Periode gehören. Diese Verteilung ist ungefähr in allen Meeresteilen des Nordostatlantik gleich. Bei der Bearbeitung mikroseismischer Stürme in Hamburg zeigte sich, daß von 25,000 abgelesenen Perioden beider Komponenten über 20,000 (also 80%) zwischen 5.5 und 6.4 sec lagen.

1944 fand Miche [*12*], daß in stehenden Wellen Druckvariationen 2. Ordnung bestehen, deren Frequenz doppelt so groß ist wie die Wellenfrequenz, und daß diese Druckvariationen kaum von der Meerestiefe abhängig sind.

Eine ausführliche Berechnung dieser Theorie wurde von Longuet-Higgins [*10*] 1951 durchgeführt. Es zeigte sich:

1. In stehenden Wellen treten Druckänderungen 2. Ordnung auf, die nicht wie die Oberflächenwellen exponentiell mit der Tiefe abnehmen und deshalb in Tiefen, die größer als eine halbe Wellenlänge sind, überwiegen.

2. Die Druckänderungen sind unabhängig von der Tiefe und auf allen Punkten des Meeresbodens in Phase.

3. Variationen des mittleren Druckes über ein weites Gebiet treten bei Interferenz von Wellen gleicher Wellenlänge auf, die in entgegengesetzter Richtung fortschreiten, aber nicht unbedingt die gleiche Amplitude zu besitzen brauchen.

4. Die Periode der Mikroseismik ist halb so groß wie die Periode der Ozeanwellen.

5. Die Amplitude der Mikroseismik ist dem Quadrat der Wellenhöhe und der Größe des Erregungsgebietes proportional und hängt von der Meerestiefe im Erregungsgebiet ab. Die Erregung des Meeresbodens hat ihr Maximum, wenn die Tiefe des Meeres ungefähr ein Drittel der Wellenlänge einer Kompressionswelle im Wasser beträgt. Dieses Maximum mag als ein Resonanzeffekt bezeichnet werden. Bei Annahme einer Wellenperiode von 13 sec, d. h. einer Frequenz $\sigma = {}^{2\pi}/_{13}$ sec^{-1}, einer Dichte des Meeresbodens von 2,8 g/cm^3 und einer Geschwindigkeit (β_2) der Transversalwelle im Meeresboden von 2.8 km/sec ergibt sich nach der Theorie ein Anwachsen der Amplituden bis zu einer Meerestiefe

von ca. 5 km, bei größeren Tiefen nehmen die Amplituden wieder ab. Diese Tiefenabhängigkeit der Amplituden wird in Abb. 1 dargestellt.

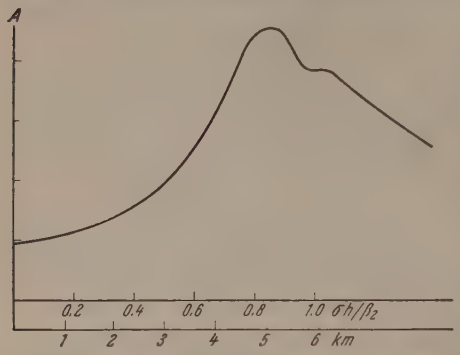


Abb. 1. Abhängigkeit der Amplitude der Mikroseismik von der Meerestiefe nach LONGUET-HIGGINS. Auf der Abszisse des Koordinatensystems ist die Größe $\sigma h/\beta_2$ abgetragen. Setzt man für $\sigma = 2\pi/_{13}\,\mathrm{sec}^{-1}$ und für $\beta_2 = 2{,}8$ km/sec, so gelten für die Meerestiefe h die angegebenen Werte. Auf der Ordinate ist die Größe der vertikalen Bodenverschiebungen in willkürlichem Maßstab dargestellt.

Um die Mikroseismik nach der Theorie von LONGUET-HIGGINS erklären zu können, müssen wir die Existenz von stehenden Wellen im Ozean voraussetzen.

Wie können sich stehende Wellen im Meer bilden?

Eine notwendige Bedingung ist das Vorhandensein von Wellen gleicher Wellenlänge und entgegengesetzter Fortschreitungsrichtung. Befinden sich zwei Tiefdruckzentren in nicht allzuweiter Entfernung voneinander über dem Meer, dann kann sich zwischen beiden Gebieten eine Zone stehender Wellen ausbilden, da zwischen den Tiefdrucksystemen die Windrichtungen entgegengesetzt sind.

MENZEL [*11*] fand bei der Untersuchung einiger mikroseismischer Stürme, daß die Quellen der Mikroseismik in den Gewässern zwischen Island und Westnorwegen lagen und immer mit mehreren Tiefdruckgebieten zusammenfielen.

Stehende Wellen können sich auch durch Reflexion an einer Steilküste bilden, wenn die Küstenlinie ungefähr senkrecht zu der Richtung der einfallenden Wellen steht. Da Wetterlagen mit senkrecht zur norwegischen und schottischen Küste stehenden Isobaren häufig sind, die „effektive Küstenlänge" erhebliche Werte annehmen kann und auch die Meerestiefe vor der mittel- und südnorwegischen Küste verhältnismäßig große Werte erreicht, besteht sehr oft die Möglichkeit, daß stehende Wellen vor der Küste Norwegens und Schottlands die Erregung mikroseismischer Stürme bewirken können.

Eine andere Möglichkeit, die eine Entstehung stehender Wellen im Ozean begünstigt, ist die Wanderung eines Sturmtiefs über dem Meer. Erreicht die Zuggeschwindigkeit eines Sturmtiefs ungefähr die Gruppengeschwindigkeit der Ozeanwellen, so werden die Wellen, die auf der einen Seite des Tiefs vom Winde erzeugt worden sind, mit denen interferieren, die nach Übergang des Tiefdruckgebietes in die andere Richtung wandern. So wird sich bei genügend schneller Wanderung eines Tiefdruckgebietes hinter diesem ein Gebiet stehender Wellen befinden. Die Wellenhöhe ist von der Zuggeschwindigkeit des Tiefdruckgebietes und der Meerestiefe abhängig.

Interferenz und Ausbildung stehender Wellen kann auch nach BERNARD [*3*] im Kern einer Zyklone möglich sein. Der Wind, der i. a.

entlang der Isobaren läuft, hat ebenfalls eine Komponente zum Mittelpunkt der Zyklone. Beobachtungen bestätigen, daß in den Zentren von Zyklonen trotz geringer Windgeschwindigkeiten großer Seegang, der charakteristisch für stehende Wellen ist, auftreten kann. Auch diese Erregungsursache wird in einigen Fällen eine gewisse Rolle spielen, doch wird es nicht immer möglich sein, die Effekte voneinander zu trennen.

II. Bearbeitungen mikroseismischer Stürme.

Im folgenden werden die Ergebnisse der Untersuchung von über 50 mikroseismischen Stürmen diskutiert. Die wesentlichen Hilfsmittel, die zur Bestimmung der Lage der Erregungszentren und deren Verhalten zur Anwendung gelangten, sind die „Ortungsmethode" und die Methode der „Kennlinien". Das Prinzip dieser beiden Methoden wurde in einer anderen Arbeit [*16*] erläutert und in einigen Fällen zur Anwendung gebracht; um einen besseren Überblick zu erhalten, erscheint es ratsam, noch einmal auf die Art und Durchführung dieser Methoden einzugehen, zumal die zusätzliche Bearbeitung von weiteren mikroseismischen Stürmen das Material wesentlich erweitert hat und Ergänzungen resp. Einschränkungen der Methoden erfordert.

Für alle bearbeiteten mikroseismischen Stürme standen die Registrierungen der Station Hamburg zur Verfügung, für 24 Stürme die Aufzeichnungen von Uppsala, für 14 von Kopenhagen, für 9 von De Bilt und für 8 Stürme von Uccle. Ferner wurden 5 Stürme der Stationen Reykjavik und Helgoland bearbeitet.

Beim Vergleich mit den Wetterkarten, die den „Täglichen Wetterberichten der Deutschen Seewarte, Hamburg" und für 1942 außerdem englischen Wetterkarten entnommen wurden, zeigte sich, daß der größte Teil der mikroseismischen Stürme (etwa 50%) mit mehreren Tiefdruckgebieten im Nordostatlantik, etwa 25% mit starken Tiefdruckgebieten über Nordnorwegen und 25% mit schnell wandernden Sturmtiefs in Zusammenhang gebracht werden konnte. Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß es schwierig ist, zu entscheiden, ob die Erregungsursache dem Zusammenwirken mehrerer Tiefdruckgebiete oder der Ausbildung stehender Wellen im Kern des stärkeren Tiefdruckgebietes oder auch dem Wandern dieser Drucksysteme zuzuschreiben ist.

Der Einfluß von Überlagerungen ist nie völlig auszuschalten. In etlichen Fällen ist die Erregungsursache der mikroseismischen Stürme nicht für alle Stationen die gleiche, eine Tatsache, die zum großen Teil durch geologische Verhältnisse bedingt ist.

A. Die Ortungsmethode.

Zur Bestimmung der Lage und des Verhaltens mikroseismischer Erregerzentren wurde die „Ortungsmethode" von Menzel angewendet. Die Voraussetzung für diese Methode ist, daß die Wellen der Bodenunruhe Rayleighwellen, *P*- oder *SV*-Wellen sind, die Bodenteilchen also in der Fortpflanzungsrichtung schwingen. Bearbeitungen mikroseismischer Wellen der Horizontal- und Vertikalkomponenten der Station Hamburg

scheinen eine gute Bestätigung dieser Annahme zu liefern. Berücksichtigt man die Schichtung des Untergrundes der Station Hamburg, so zeigt sich, daß das Wellenspektrum sehr gut mit dem von LEE [9] theoretisch für Rayleighwellen errechneten übereinstimmt. Gilt diese Voraussetzung, dann gibt die Richtung der Ortungsgeraden die Herkunftsrichtung der mikroseismischen Wellen an. Diese Richtung ist allerdings vierdeutig. Da aber kaum ein Zweifel besteht, daß die Erregungszentren der Bodenunruhe auf dem Meer bzw. an den Küsten des Meeres gelegen sind, kann man bei jeder kontinentalen Station schon mindestens zwei Richtungen ausschließen. Außerdem wird schon ein Vergleich mit der Großwetterlage die Möglichkeiten einschränken, so daß eine eindeutige Ortung fast immer durchführbar ist.

Die Bodenunruhe vor Beginn des eigentlichen mikroseismischen Sturmes bezeichnen wir als „Störpegel". Der Störpegel wird meistens durch Brandung oder starken Seegang in den Küstengewässern hervorgerufen, kann aber auch mit einem anderen mikroseismischen Sturm mit kleinen Amplituden zusammenhängen, er stellt also immer eine Überlagerung mit Wellen eines anderen Erregungszentrums dar und bewirkt so eine Vergrößerung des Schwankungsbereiches der Ortungsgeraden. Da sich während eines Sturmes der Störpegel verändert, wird eine Ortung mit den Aufzeichnungen von Stationen mit großem Störpegel immer schwierig und zum Teil fehlerhaft sein.

Für 10 mikroseismische Stürme wurde das Verhältnis Störpegel (also Bodenunruhe vor dem Anstieg der Amplituden des eigentlichen Sturmes) zu Maximalamplitude des Sturmes gebildet und es ergab sich:
Uppsala 1:2.8, Hamburg 1:2.4, Kopenhagen 1:2.2.

Obwohl dieser Mittelwert nur einen geringen Unterschied in den einzelnen Stationen aufweist, so bestätigt er doch die Erfahrung, daß die Ortung mit den Aufzeichnungen der Station Uppsala fast immer sehr gute Ergebnisse ohne große Streuung liefert. In Hamburg erweist sich die Ortungsmethode ebenfalls noch gut durchführbar, dagegen treten infolge des hohen Störpegels der Station Kopenhagen oft erhebliche Schwierigkeiten und große Streuungen bei der Durchführung der Ortung auf.

Starke Überlagerungen von Wellen verschiedener Herkunftszentren und große Störpegel sind die Hauptursachen einer fehlerhaften Ortung. In einer anderen Arbeit [16] habe ich einige Methoden zur Feststellung von Überlagerungen angegeben. Allgemein zeigt schon das Verhalten der Perioden, ob eine Überlagerung vorliegt, die die Ausgleichung stören könnte. Durch die Auswahl der größten Amplituden tritt der Einfluß von Überlagerungen auf die Ortung zumindest im Hauptteil eines Sturmes stark zurück.

Führt man eine Ausgleichung über einen ganzen Sturm durch, so vernachlässigt man die Tatsache, daß sich während dieser Zeit das Erregungszentrum verlagert. Der Peilstrahl liefert somit nur einen Mittelwert. Um die Verlagerung des Erregungszentrums zu erfassen, ist es also notwendig, den mikroseismischen Sturm in Intervalle einzuteilen und getrennte Ausgleichungen durchzuführen. Bei stationären Erregungs-

zentren, schon am gleichmäßigen Gang der Amplituden und Perioden der Horizontalkomponenten erkennbar, liefert auch eine beliebige Einteilung immer ein konstantes Ortungsergebnis.

Der mittlere Fehler der Ausgleichung ist im allgemeinen gering. Ein systematischer Fehler, der die Ortung beeinflussen könnte, ist die Tatsache, daß die Wellen der Bodenunruhe keine reinen Rayleighwellen sind, sondern daß immer ein gewisser Anteil von Love-Wellen oder anderen Wellenarten vorhanden ist. Durch die Auswahl der größten Amplituden und durch die Mittelung wird allerdings dieser Anteil kaum ins Gewicht fallen.

Auch Beugungs- und Brechungserscheinungen an geologischen Strukturen könnten einen systematischen Fehler der Ortung hervorrufen. Setzen wir allerdings voraus, daß die mikroseismischen Wellen Rayleighwellen sind, dann sehen wir ein, daß dieser Effekt nicht störend auf die Ortung einwirken kann, da die Wellen durch derartige Einwirkungen zerstört oder zumindest stark geschwächt würden und daher kaum zur Aufzeichnung gelangen würden. Raumwellen würden durch diese mehr oder weniger oberflächlichen Einflüsse nicht beeinflußt.

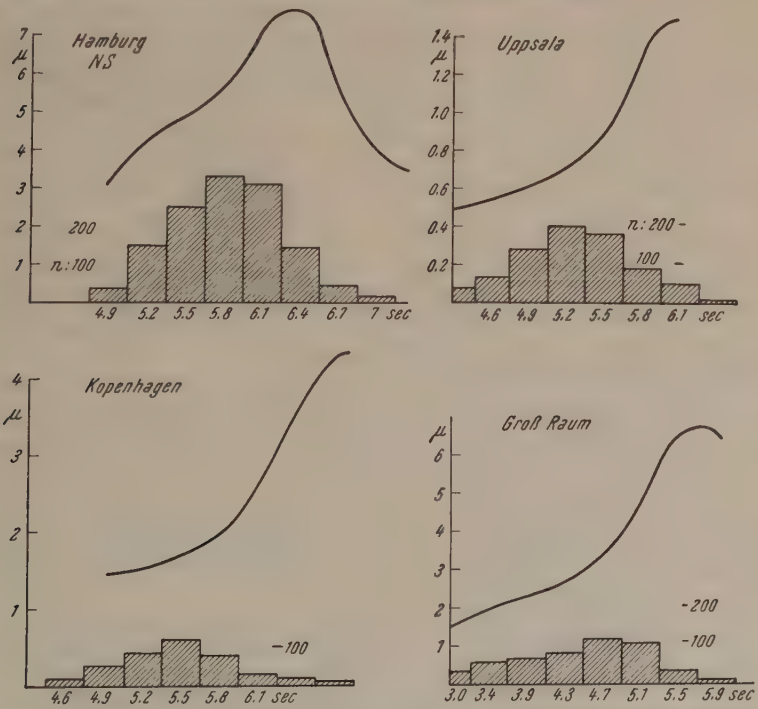


Abb. 2. Abhängigkeit der Amplituden von den Perioden bei mikroseismischen Stürmen.

B. Die Kennlinie.

In der Abb. 2 ist die Abhängigkeit der Amplituden von den Perioden im Mittel für alle Stürme und für die Stationen Hamburg, Uppsala,

Kopenhagen und Groß Raum dargestellt. Wenn man zur Konstruktion dieser Kurven eine genügend große Anzahl von Werten zugrundegelegt hat, sind diese Kurven charakteristisch und ändern sich auch nach Heranziehung zusätzlicher Amplituden kaum. Die Betrachtung der Kurven erinnert an ähnliche Darstellungen, die die Variation der Wellenhöhe mit der Wellenperiode im Ozean angeben.

Zeichnet man für jeden Sturm die Abhängigkeit der Periode von der Amplitude auf und vergleicht diese Kurven mit der Mittelwertskurve der Abb. 2, so kann man aus der Lage und der Gestalt dieser für jeden Sturm charakteristischen „Kennlinie" auf bestimmte Eigenschaften der untersuchten Stürme schließen.

Gehen wir von der Annahme aus, daß die Erregungszentren durch die Ortung und durch den Vergleich mit der Wetterlage festgelegt sind, so stellen wir fest, daß die Lage der Kennlinie zur mittleren Kurve der Abb. 2 von der Lage des Erregungsgebietes abhängig ist. Ferner fällt uns die Ähnlichkeit der Kennlinien der einzelnen Stationen auf, wenn die Erregungsursache die gleiche ist.

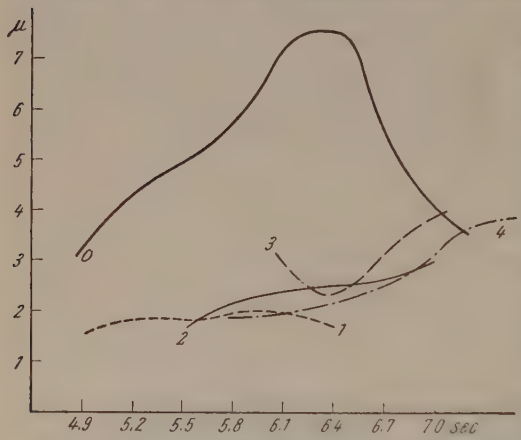


Abb. 3. Kennlinien der Station Hamburg.

Abb. 3 zeigt Kennlinien der Station Hamburg für mikroseismische Stürme, deren Erregungszentren westlich England im Atlantik gelegen sind.

Die Kennlinien liegen sehr weit unterhalb der mittleren Kurve und weisen nur einen geringen Anstieg auf. Ursache dafür ist wahrscheinlich die große Entfernung und die Einwirkung einer mikroseismischen Barriere.

Die Kurven in Abb. 3 bedeuten:

Kennlinie	Sturm	Wahrscheinliche Lage des Erregungsgebietes
Nr. 0	mittlere Kurve	
Nr. 1	13. XI. 1934	Atlantik westlich von Schottland
Nr. 2	18.—19. XII. 1934	dgl.
Nr. 3	26.—28. XII. 1933	Atlantik südwestlich von Island
Nr. 4	8.—10. XI. 1931	Atlantik westlich von Island

Die Abb. 4a und 4b bringen Kennlinien der Stationen Hamburg und Uppsala für Stürme, deren Erregungszentren in der Flachsee um Island liegen. Die verhältnismäßig geringe Meerestiefe, die eine Ausbildung großer mikroseismischer Amplituden nicht zu erlauben scheint,

bewirkt wahrscheinlich, daß sich die Kennlinien dieser Stürme unterhalb der mittleren Kurve häufen.

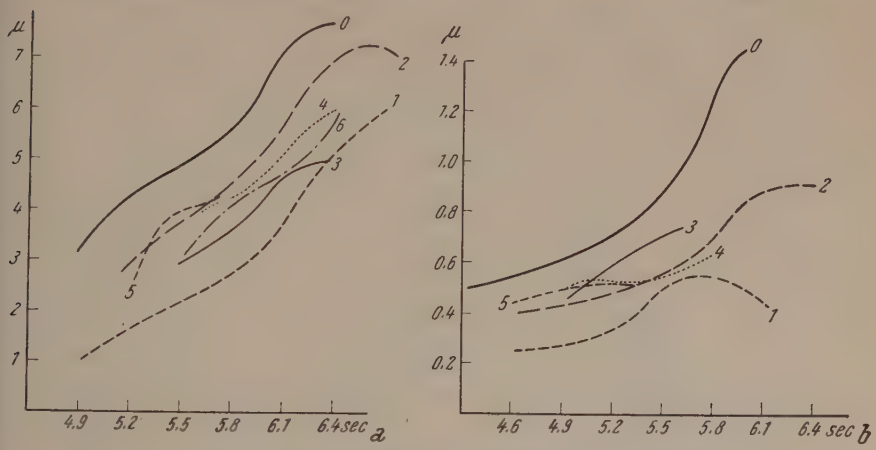


Abb. 4. Kennlinien der Stationen Hamburg a) und Uppsala b).

Die Kurven in Abb. 4a und b bedeuten:

Kennlinie	Sturm	Wahrscheinliche Lage des Erregungsgebietes
Nr. 0	mittlere Kurve	
Nr. 1	24.—25. IX. 1929	Norwegische See nordöstlich Islands
Nr. 2	26.—28. IX. 1929	südliche Norwegische See
Nr. 3	15. X. 1933	Norwegische See südöstlich Islands
	+25. X. 1933	dgl.
Nr. 4	31. I.—1. II. 1953	Norwegische See nördlich Schottlands
Nr. 5	15.—17. XII. 1933	südliche Norwegische See
	+13.—15. XI. 1926	dgl. (nördl. Schottland)
Nr. 6	1. XII. 1933	Norwegische See südöstlich Islands

Sturmzentren in der Norwegischen See und vor der norwegischen Küste haben steile Kennlinien, die immer oberhalb der mittleren Kurve gelegen sind. Erregungszentren in der mittleren Norwegischen See sind mit dem Auftreten größter mikroseismischer Stürme verbunden.

Die Kennlinien der Stationen Hamburg und Uppsala, die zu Stürmen gehören, deren Erregungszentren sich in der Nordsee befinden, liegen ebenfalls oberhalb der mittleren Kurve, doch sind sie zu kürzeren Perioden verschoben, wahrscheinlich wegen der geringeren Entfernungen dieser Zentren von den Stationen. Da es sich bei diesen Stürmen meistens um wandernde Sturmtiefs handelt, treten hier häufig Überlagerungen von Wellen mehrerer Erregungszentren auf.

Obwohl der Zusammenhang zwischen Amplitude und Periode der Mikroseismik von vielen Einflüssen abhängig ist, so zeigt sich doch, daß uns die Ähnlichkeit im Verhalten und in der Lage der Kennlinien der einzelnen Stationen einen Hinweis auf die gleiche Erregungsursache eines Sturmes geben kann und daß die relative Lage der Kennlinie zur

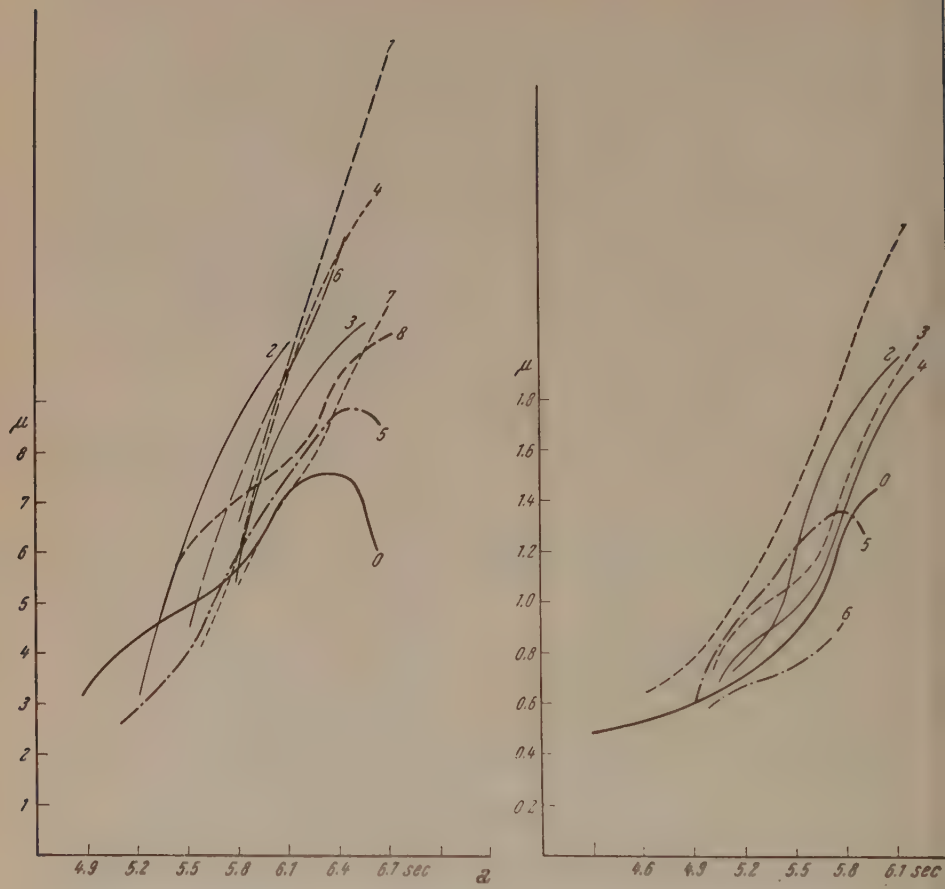


Abb. 5. Kennlinien der Stationen Hamburg a) und Uppsala b) für Sturmzentren in der Norwegischen See.

Die Kurven in Abb. 5 bedeuten:

Kennlinie	Sturm	Wahrscheinliche Lage des Erregungsgebietes
Nr. 0	mittlere Kurve	
Nr. 1	24.—26. XII. 1931	südnorwegische Küste
Nr. 2	16.—18. XI. 1926	südl. Norwegische See und norw. Küste
Nr. 3	17.—19. I. 1932	mittlere Norwegische See
Nr. 4	24.—26. III. 1942	norwegische Küste
Nr. 5	5.— 6. XI. 1931	dgl.
Nr. 6	2.— 5. XII. 1931	mittlere Norwegische See
Nr. 7	19.—20. I. 1934	dgl.
Nr. 8	31. I.—1. II. 1932	norwegische Küste

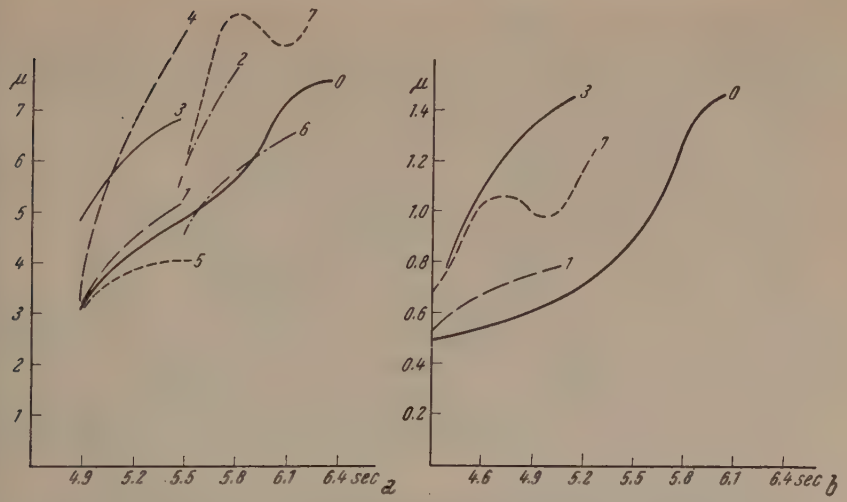


Abb. 6. Kennlinien der Stationen Hamburg a) und Uppsala b) für Erregungszentren in der Nordsee.

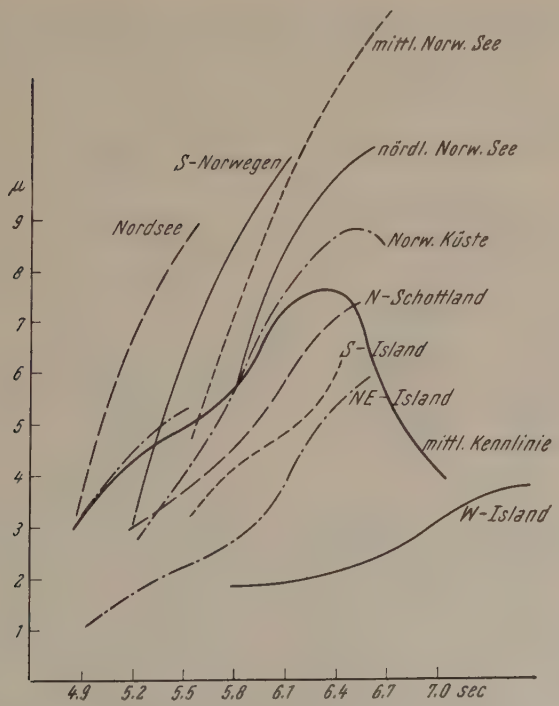


Abb. 7. Abhängigkeit der Kennlinien in Hamburg von der Lage der Erregungszentren.

Die Kurven in Abb. 6 bedeuten:

Kennlinie	Sturm	Wahrscheinliche Lage des Erregungsgebietes
Nr. 0	mittlere Kurve	
Nr. 1	9.—10. X. 1926	nördliche Nordsee
Nr. 2	17.—18. I. 1934	nördliche Nordsee
Nr. 3	27.—28. X. 1933	mittlere Nordsee
Nr. 4	2.— 4. X. 1929	mittlere und westliche Nordsee
Nr. 5	22.—23. X. 1934	nördlich Schottland
Nr. 6	24. XI. 1931	südnorwegische Küste
Nr. 7	7.— 8. II. 1934	nördliche Nordsee

mittleren Kurve der Abb. 2 von der Entfernung und der Lage des Erregungszentrums abhängig ist. Verlagert sich während eines Sturmes das Erregungszentrum, so ändert sich natürlich auch die Kennlinie.

Eine Einteilung ist aber nur dann möglich, wenn sich der Sturm über mehrere Tage erstreckt, also genügend Amplituden- und Periodenwerte zur Verfügung stehen.

Die vorstehende Abb. 7 soll noch einmal an einer Zusammenstellung einiger Kennlinien der Station Hamburg zeigen, daß uns diese Methode recht gute Hinweise auf die Lage mikroseismischer Sturmzentren geben kann.

C. Mikroseismische Stürme im Zusammenhang mit mehreren Tiefdruckgebieten über dem Nordostatlantik.

Im folgenden werden mikroseismische Stürme diskutiert, die im Zusammenhang mit mehreren Tiefdruckgebieten über dem Ozean stehen. Diese Beispiele sind typisch für diese Erregungsart und sollen uns auch die Richtigkeit der Ortungsmethode und der Methode der Kennlinien demonstrieren.

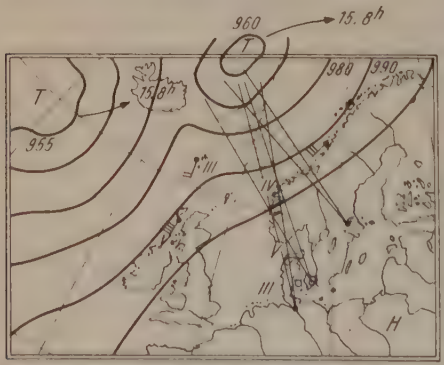


Abb. 8. Wetterlage am 14. Januar 1932 um 8 Uhr. In der Abbildung sind auch die Lagen der T-Gebiete am 15. Januar um 8 Uhr und die Peilstrahlen mit ihrem Schwankungsbereich für den Hauptteil des Sturmes angegeben.

Die Tiefdrucksysteme sind teilweise stationär, und die Peilstrahlen zeigen in das Gebiet zwischen den beiden Zentren.

Zwischen den Tiefdruckgebieten sind die Windrichtungen entgegengesetzt, so daß die Entstehung stehender Wellen begünstigt wird. Mit dem Auftreten starker T-Gebiete in der Norwegischen See wird natürlich auch der Seegang vor der norwegischen Küste anwachsen und deshalb sind Überlagerungen der mikroseismischen Stürme mit Küsteneffekten möglich.

14.—15. Januar 1932 (Abb. 8 und 9). Am 14. Januar um 8 Uhr befinden sich zwei T-Gebiete mit 955 und 960 mb nordöstlich und südwest-

lich von Island. Die Isobaren verlaufen parallel zur norwegischen und schottischen Küste. Das Gebiet, in welchem sich durch Interferenz stehende Wellen bilden könnten, liegt in der Flachsee (Meerestiefe um 0.5 km) um Island. Am 15. wandern beide Gebiete nach Nordosten.

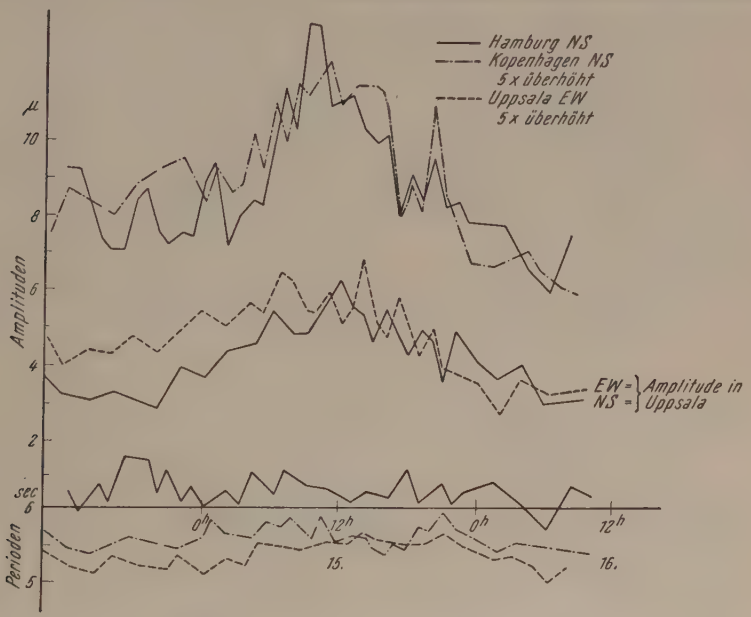


Abb. 9. Gang der Amplituden und Perioden während des mikroseismischen Sturmes vom 14. bis 16. Januar 1932. Für Kopenhagen und Uppsala wurden die Amplituden fünffach überhöht.

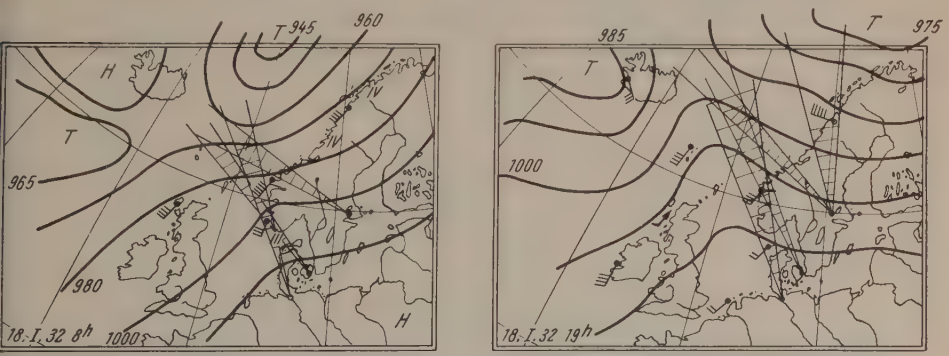


Abb. 10. Wetterentwicklung und Peilstrahlen am 18. Januar 1932. Die Peilstrahlen zeigen genau zwischen beide Tiefdruckzentren und wandern mit diesen nach Norden.

Die Zone, die die Ausbildung stehender Wellen begünstigt, liegt nun in der Norwegischen See über einem wesentlich tieferen Meeresteil (Meerestiefe ungefähr 3 km). Theoretisch müßten die Amplituden etwa doppelt so groß werden (s. Abb. 1), wenn man die Erregung der Mikroseismik mit der Theorie von Longuet-Higgins beschreiben will, vorausgesetzt,

daß sich die Intensität der beiden T-Gebiete nicht ändert. Die Abb. 1 zeigt, daß diese Forderung annähernd erfüllt ist, wenn man außerdem berücksichtigt, daß sich das nördliche T-Gebiet auf 980 mb verflacht, also die Sturmintensität nachgelassen hat.

Der Seegang an der norwegischen Küste ist während des Sturmes kaum angewachsen und die Isobaren sind noch küstenparallel, so daß nach Beobachtungen BÅTHS [*2a, b*] und anderer Forscher keine mikroseismischen Stürme durch Küsteneffekte zu erwarten sind. Die größten Seegangswerte an der norwegischen Küste sind außerdem am 16., an der schottischen Küste am 14. in den Wetterkarten eingetragen. Es besteht also kein Zusammenhang der Mikroseismik mit dem Seegang an der Küste. Die Perioden zeigen keinen Zusammenhang mit der Meerestiefe.

Als Ursache der Erregung dieses Sturmes bleibt wahrscheinlich nur die Annahme eines Interferenzsystems zwischen den beiden T-Gebieten.

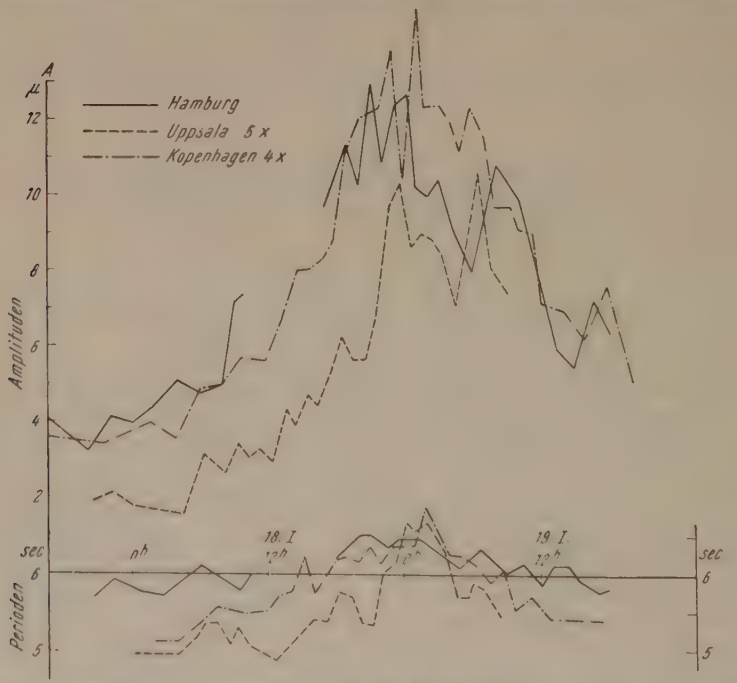


Abb. 11. Gang der Amplituden und Perioden der Bodenunruhe am 18.—19. Januar 1932. Die Amplituden sind in Uppsala fünffach, in Kopenhagen vierfach überhöht.

17.—19. Januar 1932 (Abb. 10 und 11). Während sich schon am 17. Januar ein starkes Tiefdruckgebiet (965 mb) vor der norwegischen Küste befindet, der Seegang an der Küste schon verhältnismäßig stark ist, beginnt der mikroseismische Sturm erst nach Ausbildung eines Interferenzsystems von zwei T-Gebieten in der Norwegischen See. Der

Seegang vor der norwegischen Küste weist jetzt sogar geringere Werte auf als am Vortage. Die Amplituden wachsen auch hier bei Verlagerung der T-Gebiete in die Norwegische See.

Am Schluß des Sturmes wächst der Seegang an der nordnorwegischen Küste stark an und es scheint so, als ob nun Küsteneffekte einen starken Einfluß auf die Erregung der Bodenunruhe in Uppsala haben. (Die Variation der Perioden und ihr starker Abfall am Ende des Sturmes in Uppsala und Kopenhagen deuten auf Überlagerungen mit Küsteneffekten hin.)

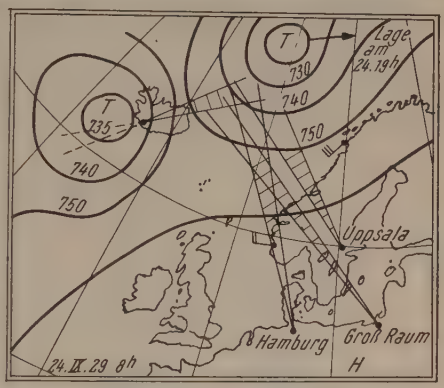


Abb. 12. Wetterlage und Peilstrahlen vom 24. September 8 Uhr. Die Ausgleichung für Groß Raum liefert nur einen Mittelwert.

24.—25. September 1929 (Abb. 12 und 13). Zwei starke T-Gebiete wandern, von Island kommend, nach Nordosten und bleiben dort bis zum 25. liegen. Der Sturm steht in keinem Zusammenhang mit der Brandung an der norwegischen oder schottischen Küste. Für die großen Entfernungen der Erregungszentren sprechen die langen Perioden im Maximum des Sturmes, für die konstante Lage des Erregungszentrums die Peilwinkel, die sich während des Sturmes nur geringfügig ändern.

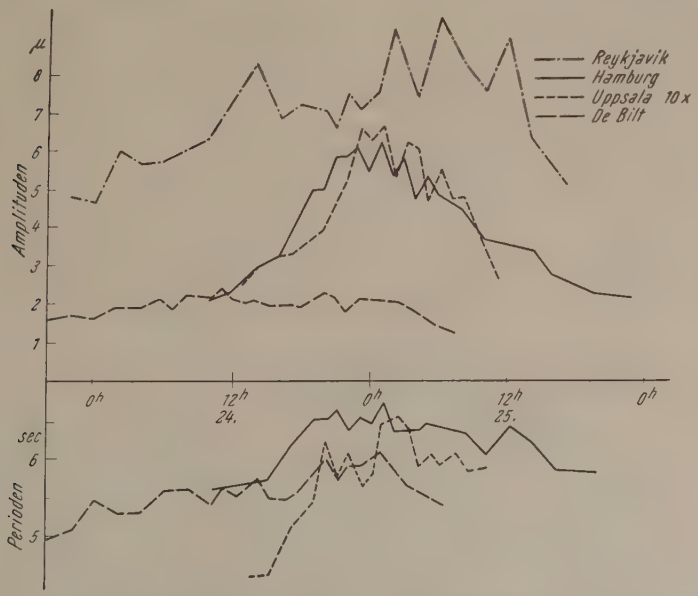


Abb. 13. Gang der Amplituden und Perioden der Bodenunruhe am 24.—25. September 1929. Die Bodenunruhe in De Bilt zeigt keinen Zusammenhang mit den übrigen Stationen.

D. Mikroseismische Stürme im Zusammenhang mit intensiven Tiefdruckgebieten über Nordnorwegen.

Die folgenden Stürme sind mit T-Gebieten gekoppelt, die über Nordnorwegen liegen und deren Isobaren lange Zeit senkrecht zur Küste stehen. In fast allen Stürmen steigt die Bodenunruhe langsam an, obwohl die Isobaren teilweise schon 1—2 Tage senkrecht zur Küste stehen und die Seegangswerte verhältnismäßig groß sind. Maßgebend für die Intensität der Bodenunruhe ist weniger der Seegang und die Windstärke an der Küste als der Winkel, den die Isobaren mit der Küste bilden. Stehen die Isobaren parallel zur Küste, dann sind erfahrungsgemäß die Amplituden der Bodenunruhe sehr gering, sofern sich nicht mehrere T-Gebiete in der Norwegischen See befinden. Es wird kaum möglich sein zu unterscheiden, ob die Mikroseismik durch Brandung oder durch stehende Wellen, die durch Reflexion vor der Küste entstehen, erregt wird. Wäre die Brandung die Erregungsursache mikroseismischer Stürme, dann müßte m. E. die Mikroseismik gleichzeitig und gleich stark mit der Brandung anwachsen und ihren größten Wert erreichen, wenn die Brandung am stärksten ist. Allgemein wurde aber nur ein langsames „Aufschaukeln" der Bodenunruhe beobachtet und kein direkter Zusammenhang mit den Brandungswerten, die in den Wetterkarten angegeben sind, festgestellt. Nur Kaltfronten, die die Küste überqueren, beschleunigen den Anstieg der Bodenunruhe.

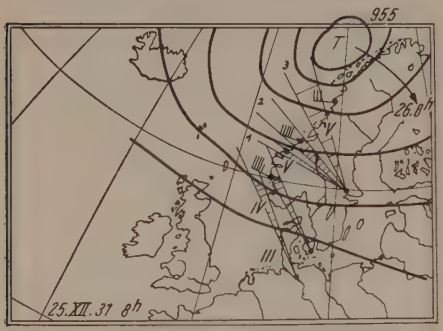


Abb. 14. Wetterentwicklung und Peilstrahlen am 25. Dezember 1931.

Für Uppsala wird in vielen Fällen diese Art der Erregung dominieren. Da der Peilstrahl immer über die Küste zeigen muß, kann nur der Vergleich mit der Bodenunruhe anderer Stationen eine eindeutige Bestimmung des Erregungszentrums ermöglichen. Der Peilstrahl wandert für Uppsala mit dem Gebiet der größten Windstärke und des stärksten Seegangs an der Küste. Für Kopenhagen und Hamburg scheint meistens die südnorwegische Küste für die Erregung der Mikroseismik von größerer Wirksamkeit zu sein. Ursache dafür dürfte die geringere Entfernung und vielleicht auch die Schwächung der mikroseismischen Wellen bei

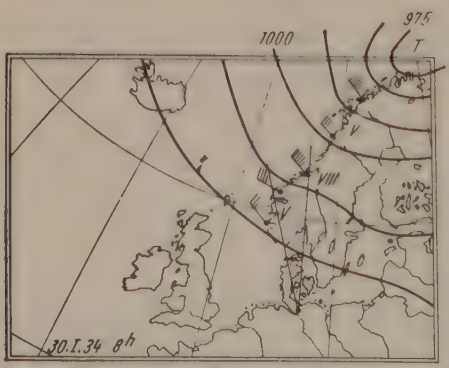


Abb. 15. Wetterlage am 30. Januar 1934 um 8 Uhr und Peilstrahl für Hamburg.

Wanderung durch das norwegische Festland bilden. De Bilt, Uccle und Reykjavik haben keine Bodenunruhe bei Stürmen, deren Erregungszentrum vor der norwegischen Küste liegt.

24.—26. Dezember 1931 (Abb. 14). Die Peilstrahlen zeigen für Hamburg und Kopenhagen ohne große Streuung zur südnorwegischen Küste. Der Peil strahl für Uppsala wandert mit den größten Seegangswerten nach Norden. Der stärkste Seegang tritt am 25. um 2 Uhr in Bergen ein, das Maximum der Mikroseismik am 25. um 18 Uhr an allen Stationen gleichzeitig.

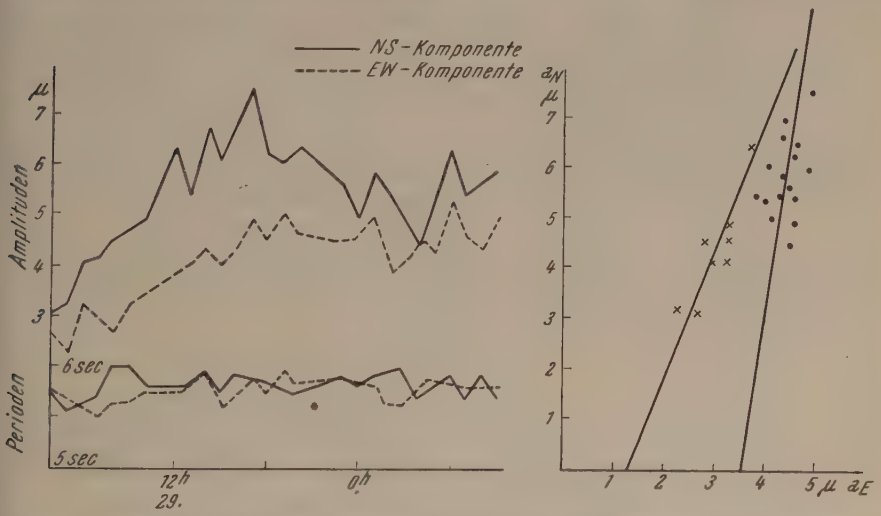


Abb. 16. Gang der Perioden und Amplituden der N-S- und E-W-Komponente und Peilstrahlen in Hamburg am 30. Januar 1934.

29. und 30. Januar 1934 (Abb. 15 und 16). Die Isobaren stehen seit dem 28. um 14 Uhr senkrecht zur Küste. Die Bodenunruhe hat ihre größte Intensität bei starkem Seegang an der südnorwegischen Küste ($\beta = 68^0 \pm 2^0$). Verlagert sich das Gebiet mit dem stärksten Seegang und der größten Windstärke nach Norden, dann sinkt die Intensität der Bodenunruhe, obwohl die Seegangswerte an der mittel- und nordnorwegischen Küste stark angewachsen sind ($\beta = 81^0 \pm 8^0$).

E. Mikroseismische Stürme im Zusammenhang mit schnell wandernden Sturmtiefs.

Bewegen sich Sturmtiefs von Island oder Schottland kommend in der Westdrift mit einer Geschwindigkeit von mindestens 50 km/h in Richtung auf die südnorwegische Küste zu, dann stellt man ein Anwachsen der Bodenunruhe in allen Stationen fest. In Hamburg, Kopenhagen und Uppsala erreicht die Bodenunruhe gewöhnlich dann ihr Maximum, wenn sich das Sturmtief über der nördlichen Nordsee vor der südnorwegischen Küste befindet; in Uccle und De Bilt wächst die Bodenunruhe schon etwas früher an, zeigt aber im Maximum des Sturmes

den gleichen Verlauf wie in den übrigen Stationen. Die Peilstrahlen zeigen in Richtung auf das Tiefdruckgebiet und wandern mit diesem, wenn die Zuggeschwindigkeit desselben eine Einteilung zuläßt. Selbstverständlich

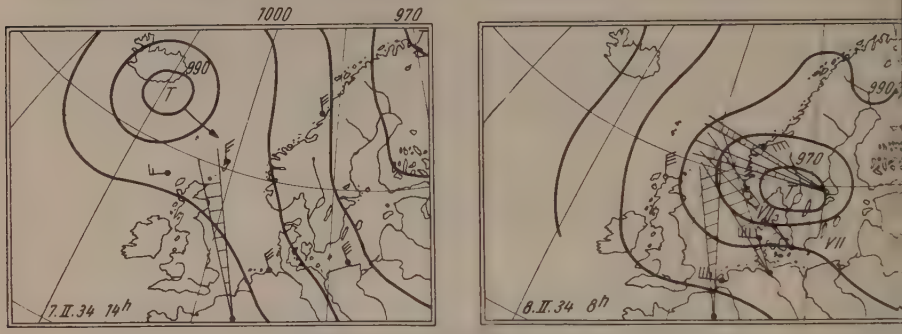


Abb. 17. Wetterlage und Peilstrahlen am 7. und 8. Februar 1934.

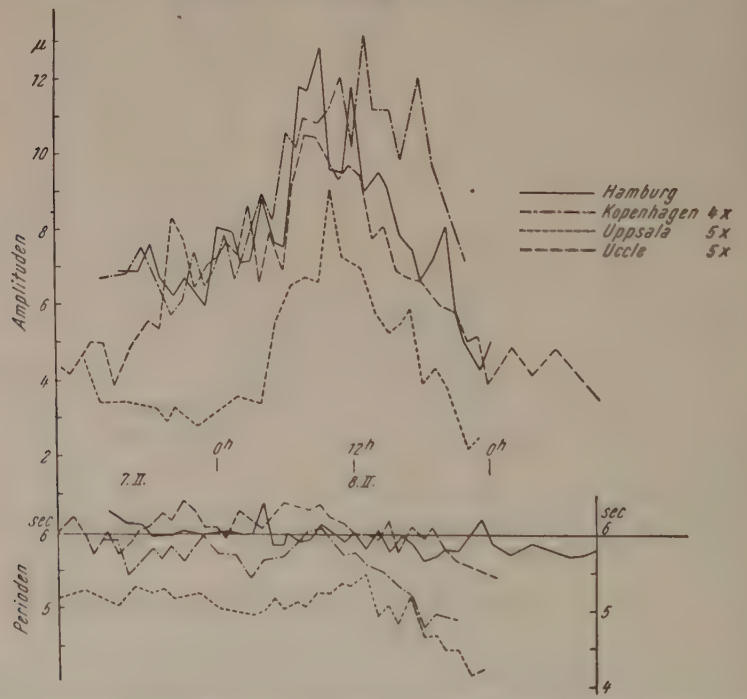


Abb. 18. Gang der Amplituden und der Perioden der Bodenunruhe am 7. und 8. Februar 1934.

kann die Richtung des Peilstrahles nicht genau mit der Lage des Sturmtiefs zu einem bestimmten Zeitpunkt übereinstimmen. Da zur Konstruktion des Peilstrahles immer die Zusammenfassung der Amplitudenwerte mehrerer Stunden erforderlich ist, wird die Richtung des Peilstrahles nur einen Mittelwert darstellen.

7.—8. Februar 1934 (Abb. 17 und 18). Ein Sturmtief wandert, von Island kommend, mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von ca. 80 km/h über die südnorwegische Küste in die Ostsee. Die Bodenunruhe wächst stark an, wenn das Tiefdruckzentrum die südnorwegische Küste erreicht. Die Perioden nehmen mit Annäherung des Sturmtiefs an die einzelnen Stationen stark ab. Die Peilstrahlen treffen sich im Gebiet der nördlichen Nordsee östlich der Shetland-Inseln. Der Gang der Bodenunruhe ist in allen Stationen gleichmäßig.

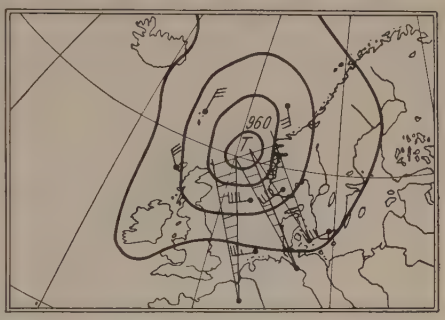


Abb. 19. Wetterlage am 18. Januar 1934 um 8 Uhr und Peilstrahlen.

17.—18. Januar 1934 (Abb. 19 und 20). Ein Tiefdruckgebiet (960 mb) wandert, von NW-Schottland kommend, in die nördliche Nordsee. In Uccle wächst die Bodenunruhe bereits am 17. an, zeigt aber im Maximum den gleichen Gang wie die Bodenunruhe in Hamburg und Kopenhagen. Die Bodenunruhe in Uppsala ist nur gering. Die Peilstrahlen

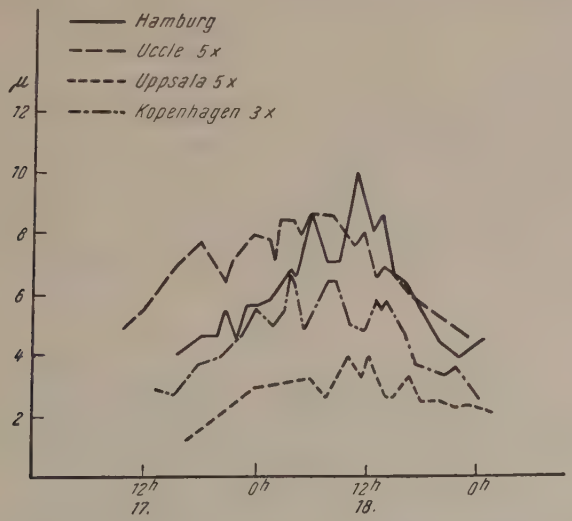


Abb. 20. Gang der Bodenunruhe am 17. und 18. Januar 1934. Die Amplituden in Uccle und Uppsala sind fünffach, die in Kopenhagen dreifach überhöht.

treffen sich im Gebiet östlich der Shetlands. Es hat den Anschein, daß das Gebiet der Nordsee östlich der Shetland-Inseln die Ausbildung mikroseismischer Wellen bei wandernden Tiefdruckzentren sehr begünstigt. Die Peilstrahlen aller Stationen zeigen meistens in dieses Gebiet.

31. Januar bis 1. Februar 1953 (Abb. 21 und 22). Ein Sturmtief (970 mb) bewegt sich, von Schottland kommend, auf Hamburg zu. Am Anfang scheint die schnelle Wanderung des Sturmtiefs die Ursache der Erregung der Bodenunruhe zu bilden (kurze Perioden), da aber die Meerestiefe immer geringer wird, überwiegt schließlich die langperiodische Bodenunruhe, die wahrscheinlich durch starken Seegang oder Küsteneffekte auf der Rückseite des Sturmtiefs nördlich Schottland erregt wird. Die Peilstrahlen weisen in dieses Gebiet. Aus der Lage der Peilstrahlen in Hamburg, die sich kaum ändern, kann man nur die Richtung des Erregungsgebietes bestimmen;

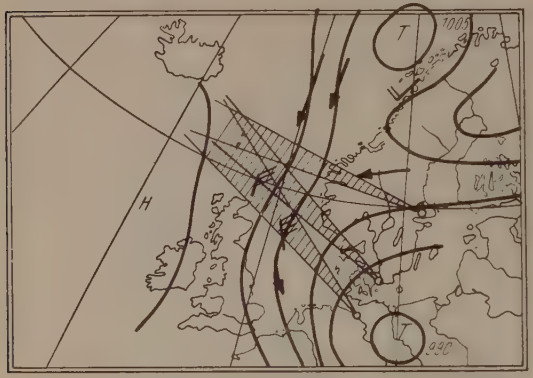


Abb. 21. Wetterlage und Peilstrahlen am 1. Februar 1953.

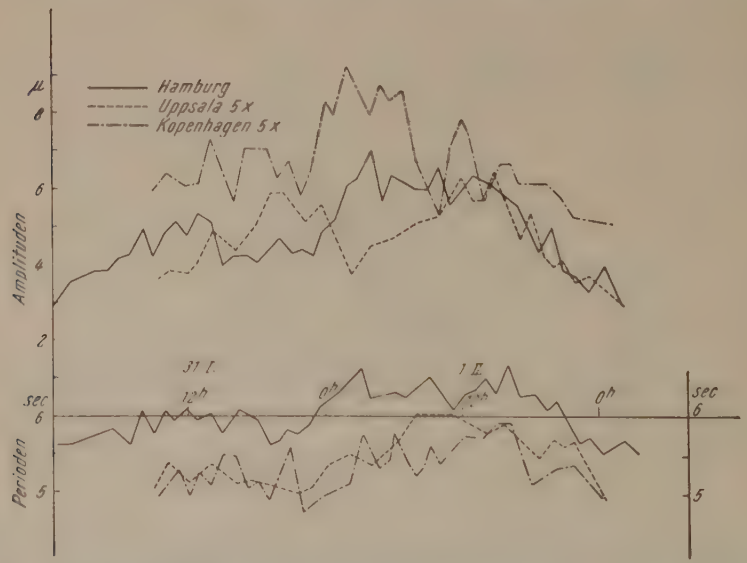


Abb. 22. Gang der Amplituden und Perioden der Bodenunruhe am 31. Januar bis 1. Februar 1953. Die zeitliche Verschiebung im Gang der Amplituden zwischen Hamburg und Uppsala ist nur vorhanden, wenn sich Erregungsgebiete in der Nordsee und im Gebiet nördlich von Schottland befinden.

erst die Hinzunahme der Kennlinie (Abb. 4a) gibt uns den Hinweis, daß das Erregungsgebiet dieses Sturmes nördlich von Schottland gelegen ist.

III. Perioden und Amplituden der Bodenunruhe.

A. Die Perioden.

Bei Annahme der Richtigkeit der Theorie von LONGUET-HIGGINS zur Erklärung der Erregungsursache der Mikroseismik müßten die mikroseismischen Wellen, da sie ja durch stehende Wellen im Ozean erregt werden, sich ebenso wie die Ozeanwellen verhalten, d. h. die Perioden der Mikroseismik müßten mit den Amplituden anwachsen. Tatsächlich stellen wir bei stationären Erregungsquellen immer einen gleichsinnigen Gang von Amplituden und Perioden fest. Die Variation der Perioden mit den Amplituden ist relativ gering, durch Überlagerungen der Wellen des mikroseismischen Sturmes mit einem kurzperiodischen Störpegel wird teilweise zu Beginn und Ende eines Sturmes ein starkes Anwachsen der Periode vorgetäuscht. Eine genaue Aussage über das Verhalten der Perioden und der Amplituden ist mit unseren Ergebnissen nicht möglich, weil die Fehlerquellen, hervorgerufen durch Überlagerungen mit Wellen anderer Erregerzentren, durch die bevorzugte Auswahl der Amplituden größerer Wellenlänge bei Überlagerungen und durch die Bildung von Mittelwerten, zu groß sind. (Vergleiche hierzu auch Kap. III, B.)

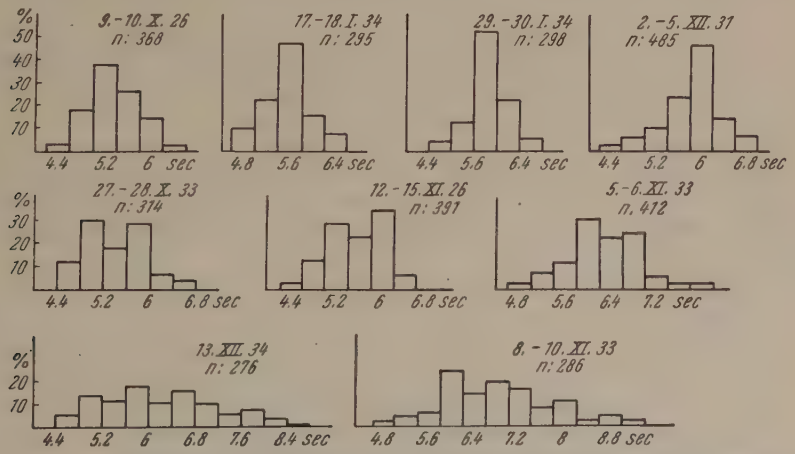


Abb. 23. Häufigkeitsverteilung der Perioden für einige mikroseismische Stürme in Hamburg in Prozenten. n = Zahl der abgelesenen Perioden eines Sturmes.

Die Beobachtung, daß die Perioden der Mikroseismik mit der Entfernung zunehmen, wurde auch hier bestätigt. Im Bereich der Norwegischen See wurde allerdings eine weniger große Änderung der Periode mit der Entfernung beobachtet. Westlich der Linie England—Island steigen die Perioden stark an. Dieser Effekt ist weniger der Entfernung als der Tatsache zuzuschreiben, daß der geologische Bau die mikroseismischen Wellen beeinflußt; denn mikroseismische Stürme in der Norwegischen See haben wesentlich kleinere Perioden als Stürme, die in gleich großer Entfernung im Atlantik westlich von England liegen.

Eine Heranziehung der Formel von GUTENBERG [*10c*] zur Bestimmung der Entfernung mikroseismischer Erregungszentren ist trotz guter Übereinstimmung in einigen Fällen wegen der großen Streuung nicht möglich, zumal die Perioden mit den Amplituden variieren und durch auftretende Überlagerungen stark verändert werden. Außerdem weisen die Beobachtungen eindeutig darauf hin, daß die Perioden eben nicht nur von der Entfernung, sondern auch vom Wellenweg, vom Stationsuntergrund, von der Ursache der Erregung und von anderen Einwirkungen abhängig sind.

Wenn wir im großen und ganzen das Anwachsen der Periode mit der Entfernung des Erregungszentrums bestätigt finden, so deutet doch keine Beobachtung darauf hin, daß eine Abhängigkeit zwischen Meerestiefe und Größe der Perioden im Sinne der Theorie von PRESS und EWING besteht.

Betrachten wir die Häufigkeit der Perioden für einzelne Stürme (Abb. 23), so fällt auf, daß bei Stürmen, deren Erregungsgebiet eine geringe Ausdehnung besitzt, die Perioden nur einen geringen Bereich umfassen und ein ausgeprägtes Häufigkeitsmaximum aufweisen:

Sturm	Wahrscheinliche Erregungsursache
9.—10. X. 1926	Sturmtief in der nördlichen Nordsee
17.—18. I. 1934	Sturmtief von Schottland nach Südnorwegen wandernd
29.—30. I. 1934	T-Gebiet über Nordnorwegen
2.— 5. XII. 1931	T-Gebiet in der Norwegischen See

Bei Überlagerungen von Wellen verschiedener Herkunftsrichtung oder bei Wanderung eines Erregungszentrums während eines Sturmes zeigt das Häufigkeitsspektrum meistens zwei oder mehrere ausgeprägte Maxima:

Sturm	Wahrscheinliche Erregungsursache
27.–28. X. 1933	Ein T-Gebiet in der Nordsee bewirkt am Anfang starken Seegang im Skagerrak und Südnorwegen, verlagert sich später in die mittlere Nordsee
12.—15. XI. 1926	Starker Seegang an schottischer Küste und Wanderung eines T-Gebietes in südliche Norwegische See
5.— 6. XI. 1933	T-Gebiet vor der norwegischen Küste wandert nach Süden und bewirkt starken Seegang in der Nordsee

Bei Stürmen, deren Erregungszentren nordwestlich von Schottland oder im Atlantik westlich von England gelegen sind, sind die Periodenspektren sehr breit:

Sturm	Wahrscheinliche Erregungsursache
13. XII. 1934	Wanderung eines Sturmtiefs westlich Irland
8.—10. XI. 1931	T-Gebiete südwestlich von Island

B. Die Amplituden.

Bildet man das Mittel über alle abgelesenen Amplituden aller bearbeiteten Stürme, so erhält man für:

Station	a_N	a_E	n	$\sqrt{a_N^2 + a_E^2}$
Hamburg	5.85	4.40	13.000	7.30
De Bilt	4.60	5.75	4.030	7.35
Groß Raum	3.53	—	445	—
Kopenhagen	1.94	1.75	4.150	2.61
Uppsala	0.84	0.97	7.800	1.28
Uccle	1.12	0.60	2.130	1.27

(n ist die Anzahl aller abgelesenen Werte jeder Komponente.)

Das Verhältnis der mittleren Amplituden, bezogen auf Uppsala, beträgt also:

Hamburg : De Bilt : Kopenhagen : Uppsala : Uccle =
5.7 : 5.8 : 2 : 1 : 1

Die Verschiedenartigkeit der Bodenunruhe an den einzelnen Stationen ist in erster Linie eine Funktion des Stationsuntergrundes. Die Bodenunruhe scheint mit der Dicke der weniger verfestigten Sedimentschichten anzuwachsen. Die gefundenen Werte der mittleren Amplituden werden weniger von der mittleren Entfernung der Erregungsgebiete und der Auswahl der Stürme abhängen. Der Wert für Uppsala und Kopenhagen stimmt genau mit dem überein, den BÅTH [*2 b*] bei Bearbeitung mikroseismischer Stürme gefunden hatte und der auch für die Erdbebenwellen mit Perioden zwischen 4 und 6 sec gültig ist.

Die mittleren Amplituden der einzelnen Stürme hängen von der Lage der Erregungszentren oder besser von der Tiefe und Beschaffenheit des Meeresbodens im Erregungsgebiet, von der Intensität und von der Entfernung der Erregungsgebiete ab. Auf Grund der vielen Faktoren, die bestimmend für die Größe der Amplitude sind, ist ein Vergleich nicht möglich und eine genauere Aussage nur dann, wenn gleichzeitige Beobachtungen des Seeganges im Erregungsgebiet vorliegen würden.

Deutlich zeigt sich jedoch, daß Stürme mit den größten Amplituden zu Erregungsquellen gehören, die im Gebiet der tieferen Norwegischen See gelegen sind. Für Uppsala und Kopenhagen haben Erregungszentren vor der norwegischen Küste, für Hamburg starker Seegang in der nördlichen Nordsee fast den gleichen Einfluß auf die Größe der Bodenunruhe. Die Amplituden der mikroseismischen Wellen, deren Quelle in der Flachsee um Island oder nördlich von Schottland liegt, sind wesentlich kleiner. Stürme, deren Erregungszentrum westlich der Linie England—Island liegen, haben in Hamburg, Kopenhagen und Uppsala nur sehr kleine Amplituden. Für Uccle und De Bilt treten vollkommen verschiedene Verhältnisse auf, eine Tatsache, die sicherlich auf das Vorhandensein einer mikroseismischen Barriere zurückzuführen ist.

Über die Regelmäßigkeit der Mikroseismik wurden für Hamburg und Kopenhagen folgende Zusammenhänge zwischen dem Auftreten von Gruppen in der Mikroseismik und der Lage der Erregungszentren festgestellt:

Die Mikroseismik ist gruppenlos oder hat nur sehr wenige stark gestörte Gruppen, wenn das Erregungsgebiet nordwestlich von Schottland oder südlich von Island im Atlantik gelegen ist. Geringe Gruppenbildung und Auftreten kleinerer Gruppen beobachtet man bei Stürmen in der mittleren Nordsee und im Flachseegebiet um Island.

Gute und lange Gruppen treten auf, wenn sich das Erregungsgebiet in der Norwegischen See, in der nördlichen Nordsee oder vor der norwegischen Küste befindet.

DONN [6 *c*] und PRESS und EWING [7 *c*] nahmen an, daß die „regularity" der Mikroseismik von der Beschaffenheit bzw. von der Tiefe des Meeresbodens abhängig sei. Unsere Beobachtungen scheinen diese Auffassung zu bestätigen. Die Unregelmäßigkeit der Bodenunruhe, die in Gebieten westlich der Linie England—Island erregt wird, ist sicher eine Folge der Einwirkung einer mikroseismischen Barriere, die in diesem Gebiet vermutet wird.

Überblicken wir die Ergebnisse unserer Zusammenfassung, so kommen wir zu dem Schluß, daß die Erregungsursachen der Bodenunruhe am besten durch die Theorie von LONGUET-HIGGINS beschrieben werden können. Für die Annahme der Richtigkeit dieser Theorie scheinen folgende Beobachtungen zu sprechen:

Die Perioden sind im Mittel halb so groß wie die Perioden der Ozeanwellen. (Vergl. I.)

Die Ergebnisse der Ortung bestätigen ein Anwachsen der Amplituden mit der Meerestiefe. Es wurde wiederholt beobachtet, daß die Bodenunruhe bei Verlagerung des Tiefdruckgebietes in Gebiete mit größeren Meerestiefen anstieg, obwohl die Intensität der Zyklonen abnahm.

Bei Stürmen mit stationären Erregungszentren und ohne große Überlagerungen wachsen die Perioden mit den Amplituden bis zu einem Maximalwert an, der von der Lage und der Entfernung der Erregungsquelle abhängig ist, und nehmen mit den Amplituden wieder ab, weisen also im wesentlichen das gleiche Verhalten wie die Ozeanwellen auf.

Ein Zusammenhang zwischen Perioden und Meerestiefe wurde nicht festgestellt und somit kann die Theorie von PRESS und EWING kaum aufrecht erhalten werden.

Die Brandungstheorie kann nicht in allen Fällen ausgeschaltet werden. Die Tatsachen, daß in den meisten Stürmen die stärkste Bodenunruhe nicht mit dem Auftreten der größten Brandung an den Steilküsten zeitlich übereinstimmt und starke mikroseismische Bodenunruhe auch beobachtet wurde, obwohl die Isobaren parallel zur Küste standen oder die Tiefdruckgebiete sich noch weit von den Küsten entfernt über dem Atlantischen Ozean befanden, sprechen gegen diese Theorie.

Herrn Prof. Dr. MENZEL möchte ich hiermit recht herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit danken. Den Herren Direktoren der seismischen Observatorien in Uppsala, Kopenhagen, De Bilt und Uccle spreche ich für die freundliche Überlassung der Seismogramme meinen Dank aus.

Literatur

1. BANERJI, S. K.: Theory of Microseisms. Proc. Ind. Acad. Sci. (A) **1,** 727 (1935).
2. BÅTH, M.: a) An Investigation of the Uppsala Microseisms. Met. Inst. Uppsala Medd. No. 14 (1949).
b) Comparision of Microseisms in Greenland, Iceland, and Scandinavia. Tellus **5,** 109 (1953).
c) The Problem of Microseismic Barriers. Met. Inst. Uppsala Medd. No. 28 (1952).
3. BERNARD, P.: Relations entre la houle sur la côte du Maroc et l'agitation microséismique en Europe Occidental. Acad. Sci. Paris, **205** (1952).
4. DEACON, G. E. R.: Relations between Sea Waves and Microseisms. Nature, **160,** 419 (1947).
5. DONN, W.: a) Cyclonic Microseisms generated in the Western North Atlantic. Journ. Met., **9,** 61 (1952).
b) A Comparision of Microseisms and Ocean Waves Recorded in Southern New England. Trans. Am. Geoph. Union, **35,** 471, (1952).
6. PRESS, F., and M. EWING: A Theory of Microseisms with Geological Applications. Trans. Am. Geoph. Union, **29,** 163 (1948).
7. GHERZI, E.: a) Cyclones and Microseisms. Gerl. Beitr. Geoph. **36,** 20 (1932).
b) Le problème des microséismes et le déferlement des vagues. Z. f. Geoph. **10,** 317 (1934).
8. GUTENBERG, B.: a) Die seismische Bodenunruhe. Gerl. Beitr. Geoph. **11,** 314 (1912).
b) Untersuchungen über die Bodenunruhe in Europa. Veröff. Zentr. Inst. Seism. Ass. Strasbourg (1921).
c) Observations and Theory of Microseisms. Compendium of Meteorology, 1303 (1951).
9. LEE, A. W.: The Effect of Geological Structure upon Microseismic Disturbances. Month. Not. Roy. Astron. Soc., Geophys. Suppl., **3,** 83 (1932).
10. LONGUET-HIGGINS, M. S.: A Theory of the Origin of Microseisms. Phil. Trans. Roy. Soc. London, (A) **243,** 1 (1950).
11. MENZEL, H.: Seismische Bodenunruhe in Norddeutschland.
12. MICHE, M.: Mouvements ondulatoires de la mer en profondeur constante ou décroissante. Ann. Ponts. Chauss. **114** (1944).
13. RAMIREZ, J. E.: An Experimental Investigation of the Nature and the Origin of Microseisms at St. Louis. Bull. Seismol. Soc. Am., **30,** 35 and 139 (1940).
14. ROLL, H. U.: Statistik von Wellenbeobachtungen nordatlantischer Wetterschiffe von 1950/51.
15. VISSER, S. W.: Zusammenhang zwischen der Bodenunruhe und Zyklonen. Z. f. Geophys. **16,** 329 (1940).
16. WESTERHAUSEN, H.: Über die Ortung mikroseismischer Unruheherde. Annali di Geof. **7,** 1 (1954).

(Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien.)

Airy oder Pratt?

Von

M. Toperczer.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Reflexionsseismische Beobachtungen aus jüngster Zeit haben gezeigt, daß es technisch durchaus möglich ist, auch den tiefen Untergrund nach dieser Methode zu untersuchen. Damit scheint der Streit, ob die isostatische Kompensation eher nach dem Modell von PRATT oder dem von AIRY in der Natur verwirklicht wird, einer weiteren Überprüfung zugänglich zu sein. Die Modelle von PRATT und AIRY mit ihren begrifflichen Schwierigkeiten werden diskutiert und es wird eine Synthese der beiden Auffassungen vorgeschlagen. Zum Schlusse wird darauf hingewiesen, daß es zwei Möglichkeiten für das Auftreten von Reflexionshorizonten geben könne: stoffliche Diskontinuität und sprunghafte Zustandsänderung im homogenen Medium. Deswegen kann auch die Reflexionsseismik zunächst keine eindeutige Antwort auf Fragen nach dem Aufbau der Kruste geben.

Summary. Recent seismic reflection observations have shown the technical possibility of investigating also the deep underground by this method. Thereby the question whether the isostatic compensation follows in nature rather the model of PRATT or that of AIRY seems to be open to further examination. The models of PRATT and AIRY and their fundamental difficulties are discussed and a synthesis of both principles is proposed. Finally, two possibilities for the occurrence of reflection horizons are indicated: a material discontinuity and an abrupt change of state in the homogeneous medium. For this reason, seismic reflection observations do not yield, at the moment, an unequivocal answer to the question of the structure of the earth's crust.

Résumé. Des expériences récentes de sondage par réflexion ont prouvé qu'il est pratiquement possible d'explorer également le sous-sol profond par cette méthode. Cela permet, semble-t-il, de réexaminer la question de savoir si la compensation isostatique se fait en réalité selon le modèle de PRATT ou celui de AIRY. L'auteur discute ces deux modèles en exposant leurs difficultés de principe et en propose une synthèse. Il fait enfin remarquer qu'un horizon réfléchissant peut apparaître sous deux formes: discontinuité de matière ou changement brusque de constitution dans un matériau homogène. C'est pourquoi la prospection sismique par écho ne peut pour le moment résoudre le problème fondamental de la structure de l'écorce terrestre.

In jüngster Zeit ist die Frage nach der Beschaffenheit des Untergrundes unterhalb der großen Gebirge, ob es gemäß der Hypothese von AIRY eine

Gebirgswurzel gebe, wieder besonders in den Mittelpunkt des Interesses getreten. Dies vor allem deswegen, weil heute die Möglichkeit besteht, mit den Methoden der Reflexionsseismik, wie erfolgreich durchgeführte Versuche schon bewiesen haben, eine Untersuchung des tiefen Untergrundes auf eine andere Weise, als durch die doch unsichere und nicht zwingende Deutung der Schwereanomalien durchzuführen.

Bis heute war die Deutung der Anomalien des Schwerefeldes der einzige Weg zur Erforschung der Massenverteilung im tieferen Untergrund. Unsere derzeitigen Vorstellungen über den Aufbau der Kruste sind vorwiegend auf diese Art abgeleitet. Erst einige seismische Untersuchungen der letzten Jahre haben gewisse Zweifel an der Gültigkeit oder Plausibilität dieser Vorstellungen hervorgerufen. Bevor jedoch auf die Möglichkeiten der Seismik eingegangen werden soll, muß die Realität der bis jetzt gebräuchlichen Krustenmodelle aus der Art ihrer Ableitung überprüft werden.

Das irdische Schwerefeld besteht aus zwei Anteilen von ganz verschiedener Größe. Das Potential der Schwere W in einem beliebigen Punkt ist aus zwei Anteilen U und T zusammengesetzt:

$$W = U + T;$$

in U sind dabei die Glieder bis einschließlich der zweiten Ordnung zusammengefaßt, die der regelmäßigen Massenanordnung des Niveausphäroides entsprechen, in T sind alle Restglieder höherer Ordnung, die mit den zusätzlichen Massenunregelmäßigkeiten im Aufbau der Erde zusammenhängen, enthalten. Die sehr plausible und durch andere Überlegungen zu stützende Annahme aus diesem Aufbau des irdischen Schwerefeldes ist die, daß zum größten Teil die die Erde aufbauenden Massen sich im Zustand des hydrostatischen Gleichgewichtes befinden; nur ein kleiner Teil der Erdmasse, die Kruste, entspricht dieser Gleichgewichtsbedingung nicht, aber auch ihre Anordnung kann keine willkürliche sein, sie muß die Bedingung isostatischen Gleichgewichtes erfüllen. Dabei ist aber zu bemerken, daß alle aus dem Schwerepotential abgeleiteten Schlußfolgerungen über eine bestimmte Form der Massenverteilung nicht zwingend sind, da ein und dieselbe Potentialverteilung durch unendlich viel verschiedene Massenanordnungen erzeugt werden kann.

Das hydrostatische Gleichgewicht ist dadurch bestimmt, daß die Niveauflächen der Schwerkraft, also die Flächen $W = \text{const}$, selbst auch Flächen gleicher Dichte und gleichen Druckes sein müssen, da bei Abweichungen von dieser Bedingung Kräfte auftreten würden, die eine Veränderung der momentan vorhandenen Massenanordnung zur Folge hätten. Ein solcher Zustand ist aber kein Gleichgewicht. Stabil ist eine derartige Massenanordnung im hydrostatischen Gleichgewicht dann, wenn sie gleichzeitig einem Minimum an potentieller Energie im Schwerefeld entspricht. In diesem Fall können spontane Massenverlagerungen unter dem Einfluß des Schwerefeldes allein nicht auftreten.

Anders aufgebaut ist das isostatische Gleichgewicht der äußeren Kruste. Schon der bloße Augenschein der physischen Erdoberfläche mit

ihren großen Unregelmäßigkeiten zeigt, daß die Kruste sich nicht im Zustand des hydrostatischen Gleichgewichtes befinden kann. In ihrem Bereich können die Niveauflächen der Schwerkraft nicht Flächen gleichen Druckes sein. Dennoch darf die Lagerung der Massen auch in der Kruste keine willkürliche sein. Das hydrostatisch geschichtete Erdinnere wird nach außen durch eine Grenzfläche abgeschlossen, die selbst eine Niveaufläche ist, für die aber noch die Bedingung des hydrostatischen Gleichgewichtes, daß sie auch eine Fläche gleichen Druckes sein soll, gelten muß. Es muß daher über einer jeden Flächeneinheit dieser Grenzfläche ein gleich großes Gewicht lagern und dies ist jene Bedingung, die die Massenanordnung oberhalb der Grenzfläche, im Bereich der Kruste, erfüllen muß. Ungenauer kann man auch von Massengleichheit sprechen, wenn man eng begrenzte Teile der Erdoberfläche meint, in deren Bereich die Schwerkraft sich nicht beträchtlich ändert.

Da die Niveauflächen im Krustenbereich keine Flächen gleichen Druckes sind, entstehen in der Kruste Spannungen, die sich nur solange nicht ausgleichen können, als die Festigkeit des Krustenmaterials nicht überschritten wird. Dieser Zustand kann sich aber nicht bis zu beliebiger Tiefe fortsetzen, da schließlich bei Extrapolation bis zum Erdmittelpunkt dieser kein Ort bestimmten Druckes mehr wäre; der Druck wäre vielmehr abhängig von der Richtung, aus der der Erdmittelpunkt erreicht wird. Einer solchen Festigkeit, wie sie zum Aufrechterhalten der stets größer werdenden Spannungsunterschiede bei unregelmäßiger, vom hydrostatischen Gleichgewicht abweichender Massenlagerung notwendig wäre, sind aber die Massen des Erdinnern unterhalb einer bestimmten Tiefe nicht mehr fähig. Alle bisher diskutierten Modelle über den Aufbau des Erdinnern gehen deshalb vom hydrostatischen Gleichgewicht aus, das durch die Zusammensetzung des Schwerepotentials W nahegelegt wird, und betrachten daher die Zustandsveränderlichen des Modells als alleinige Funktionen des Radius, oder exakter ausgedrückt: als konstant auf der Niveaufläche $W = \text{const}$. Eine derartige Massenverteilung könnte man auch eine CLAIRAUTsche nennen, weil ein Hauptergebnis von CLAIRAUTs Untersuchungen über die Figur der Erde auch so ausgesprochen werden kann, daß sich die Erde in der Hauptsache wie eine rotierende, inhomogene Flüssigkeit verhält.

Die Annahme des hydrostatischen Gleichgewichtes in der Tiefe erscheint auch deshalb plausibel, weil bei den dort anzunehmenden Temperaturen eine ausreichende Plastizität des Materials wahrscheinlich ist, die zusammen mit der *andauernd* wirkenden Schwerkraft die hydrostatische Schichtung der Massen herbeiführt. Es sei dazu noch bemerkt, daß die Schwerkraft noch an der Grenze des Erdkerns, also in rund 2900 km Tiefe, von gleicher Größe wie an der Erdoberfläche ist und selbst in 5000 km Tiefe noch mehr als die Hälfte ihres Oberflächenwertes beträgt. Ihre ordnende und anordnende Wirkung erstreckt sich also bis in sehr beträchtliche Tiefen und würde auch ausreichen, die Gesamtmasse der Erde nach einem stabilen Gleichgewicht anzuordnen. Doch soll auf diese Frage, weil nicht zur Absicht des vorliegenden Aufsatzes gehörig, nicht näher eingegangen werden.

Eine isostatische Massenanordnung kann nur dann durch längere Zeit bestehen bleiben, wenn sie in einem Material entsprechend großer Festigkeit aufgebaut wird. Bei einer isostatischen Massenanordnung fallen die Flächen gleichen Druckes und die Niveauflächen der Schwere nicht zusammen. Es bestehen daher Druckgradienten, die bestrebt sind, die tatsächlich vorhandene Massenanordnung in eine solche überzuführen, die dem hydrostatischen Gleichgewicht entspricht. Nur dort, wo die Festigkeit des Materials größer ist als die vorhandenen Spannungen, kann die isostatische Massenlagerung bestehen bleiben. Nach unseren heutigen Anschauungen über den Aufbau der Erde sind solche Festigkeitsverhältnisse nur im Krustenbereich zu finden. Die Tiefe der Ausgleichsfläche, die die beiden Zustandsbereiche des isostatischen und des hydrostatischen Gleichgewichtes voneinander scheidet, ist von den Materialkonstanten und den sie beeinflussenden Zustandsgrößen, Temperatur und Druck, abhängig.

Kleine Abweichungen vom Zustand des isostatischen und hydrostatischen Gleichgewichtes sind immer vorhanden. Im Bereich der Kruste wissen wir aus den Ergebnissen der Schweremessungen, daß die isostatische Massenlagerung nur in einem gewissen Durchschnitt erfüllt ist. Isostatische Kompensation besteht nicht für einen beliebig kleinen Bereich oder ein jedes Detail der Oberfläche. Abweichungen von der isostatischen Kompensation in der Kruste, soweit solche Abweichungen über einem größeren Bereich, also im Durchschnitt auftreten, müssen auch auf das hydrostatische Gleichgewicht des Erdinnern zurückwirken. Es können, wegen der Zähigkeit der Massen in der Tiefe, deshalb auch kleine Abweichungen vom Zustand des hydrostatischen Gleichgewichtes durch endliche Zeiten erhalten bleiben. Es besteht eine weitgehende Tendenz zur Verwirklichung des isostatischen und hydrostatischen Gleichgewichtes, ohne daß diese Zustände erreicht würden. Denn die Erde ist dauernden, heute schon verhältnismäßig langsam ablaufenden Zustandsänderungen unterworfen, die einen wirklichen Gleichgewichtszustand ausschließen. Da aber die Änderungen nur langsam erfolgen, können auch die Abweichungen vom Gleichgewichtszustand sehr klein sein.

Die Zustandsänderungen der Erde werden durch die dauernd einwirkenden Kräfte bewirkt. Diese sind die Folge eines Energieumsatzes. Energie wird von außen der Erde zugeführt und in ihrem Innern freigemacht. Die exogenen Kräfte verändern andauernd die Erdoberfläche und erzeugen hier Massenverlagerungen, durch die das isostatische Gleichgewicht verändert wird und die den Kompensationsmechanismus dauernd anregen. Die Massen der Tiefe haben einen sehr hohen Energieinhalt, aus dem die endogenen Kräfte gespeist werden. Die Niveauflächen sind auch Flächen gleicher Zustandsvariabler und damit auch Flächen gleicher thermodynamischer Energie. Würden in einer Niveaufläche verschiedene Energieniveaus enthalten sein, so würde es dadurch zu einer Energieentfaltung und damit auch zu einer Massenumlagerung kommen, die den Gleichgewichtszustand bzw. den quasistatischen Zustand zerstören würden. Schon deswegen müssen Niveauflächen im Zustand des hydrostatischen Gleichgewichtes auch Flächen gleicher Arbeitsfähigkeit im erwei-

terten Sinn sein. Umgekehrt kann deswegen angenommen werden, daß eine Störung des hydrostatischen Gleichgewichtes auch zu einer Energieentbindung aus dem vorhandenen Vorrat führen wird, die notwendig ist, um den Gleichgewichtszustand wieder herzustellen.

Zwei ganz verschiedene Modelle über das Zustandekommen der isostatischen Kompensation beim Aufbau der Kruste haben das geophysikalische und vor allem das geologische Denken bis heute beherrscht, die Hypothesen von AIRY und PRATT, die beide gleichzeitig und aus dem gleichen Anlaß, zur Erklärung der am Himalaya beobachteten Massendefekte, entstanden sind. Beide Hypothesen sind statisch, etwa vergleichbar der statischen Theorie der Gezeiten, sie suchen nur die isostatische Massenkompensation zu erklären, ohne aber auf die Entstehung oder die Weiterentwicklung eines derartigen Zustandes Rücksicht zu nehmen; sie enthalten überdies in ihrem Erklärungsprinzip einen extremen Gegensatz.

Die nachstehenden Abbildungen 1 a und b zeigen für das gleiche Oberflächenprofil, das schematisch ein Gebirge in der Nähe einer Meeresküste, also entsprechend große Gegensätze der physischen Erdoberfläche darstellt, den Kompensationsmechanismus einmal nach den Anschauungen von PRATT (Abb. 1a) und nach der Hypothese des Schwimmgleichgewichtes von AIRY (Abb. 1 b).

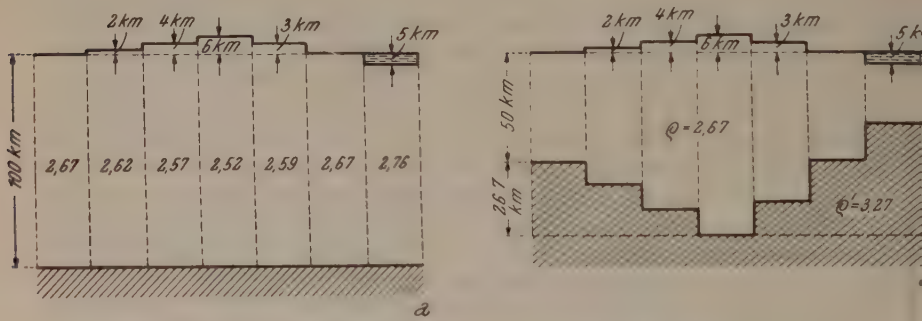


Abb. 1. Isostatisches Gleichgewicht nach PRATT a) und AIRY b).

Nach PRATT erfolgt die Kompensation ausschließlich in den Massen der Kruste allein, ohne Einbeziehung des Substratums. In einer bestimmten Tiefe liegt die Ausgleichsfläche, die hier auch eine materielle Trennfläche gegen die Massen des Substratums ist. Auf ihr ruhen die Massensäulen der Kruste. Die Massenkompensation wird dadurch erzeugt, daß das Produkt aus mittlerer Dichte der einzelnen Säule mit ihrer Höhe eine Konstante ist. Dies gibt die für die Kompensation nötige Massenkonstanz einer jeden einzelnen Säule. Die „normale" Dichte hat eine Massensäule, die von der Ausgleichsfläche sich bis zum Meeresniveau erstreckt. Massensäulen, die das Meeresniveau überragen, kann man sich durch Expansion, solche die unterhalb des Meeresniveaus endigen, durch Kompression einer Normalsäule entstanden denken. Bei diesem Modell ist die Massenkonstanz in einfacher Weise verwirklicht, schwieriger ist es, einen Vorgang anzu-

geben, durch den die jeweils notwendige Aufblähung oder Einsenkung der Krustenmasse erzeugt wird.

Im Modell von Airy entsteht die Kompensation als Folge eines Schwimmgleichgewichtes der in die Massen des Substratums, des Sima, das als zähplastisch vorgestellt wird, eintauchenden Sialschollen der Kruste. In diesem Modell ist die mittlere Dichte für Sial und Sima konstant, variabel ist nur die Gesamtausdehnung der einzelnen Sialsäulen in vertikaler Richtung. Die bis zum Meeresniveau reichende Säule ist auch hier (Abb. 1 b) als gleich dicht wie beim Prattschen Modell angenommen worden. Die Dimensionen sind also in beiden Bildern streng vergleichbar. Beim Airyschen Modell ist die physische Trennfläche zwischen Sial und Sima keine Ausgleichsfläche, denn je höher die Massen der Erdoberfläche sich auftürmen, um so tiefer muß auch ihr Fuß in das Substratum eintauchen. Die über einer jeden Flächeneinheit der wirklichen Ausgleichsfläche liegenden gleichen Gewichte werden bei diesem Modell durch eine Kombination von Sial- und Simasäulen zusammengesetzt. Deswegen ist hier die Ausgleichsfläche jene Niveaufläche, die die am tiefsten in das Sima eintauchende Sialsäule gerade tangiert. Wesentlich für dieses Modell ist, daß der für sein Zustandekommen notwendige Mechanismus eines Schwimmgleichgewichtes leicht verständlich ist — wenngleich man das „Schwimmen" noch genauer beschreiben müßte —, daß ein Zusammenwirken zwischen Sial und Substratum für die Herstellung der isostatischen Kompensation nötig ist, und daß schließlich die Trennfläche zwischen Sial und Sima keine stabile Gleichgewichtsfläche bezüglich der Druckverteilung ist. In ihr bestehen Spannungen, die, falls sie größer sind als die Festigkeit der eintauchenden Sialsäule, bestrebt sein werden, das Sial nach oben, das schwerere Sima nach unten zu verlagern, wie es eben der stabilen Lagerung in einem Schwerefeld entspricht. Eine derartige Lagerung, bei der im Bereich einer Niveaufläche Dichteunterschiede bestehen, kann nur bei entsprechender Festigkeit des Materials beständig sein.

Eine Bestätigung der Anschauungen von Airy fand man in den eustatischen Schollenbewegungen, in den Hebungen und Senkungen, die bei Entlastung oder Belastung einzelner Krustenteile sich zeigen. Alle diese Vorgänge lassen sich durch die Theorie eines Schwimmgleichgewichtes leicht erklären.

Beide Erklärungsversuche der isostatischen Kompensation führen aber zu großen Schwierigkeiten physikalischer Art, wenn man sie nicht rein statisch auffaßt, sondern berücksichtigt, daß es sich um ein dynamisches Gleichgewicht handelt, wenn auch geologische Vorgänge so langsam ablaufen, daß der gegenwärtige Zustand fast als etwas Beharrliches und Unveränderliches erscheint.

Es ist schwer verständlich, wie eine Prattsche Massenanordnung auf die Dauer im isostatischen Gleichgewicht bleiben soll. Über dem Kontinent werden durch das Spiel der exogenen Kräfte Massen abgetragen und nach dem Randmeer geschafft. Über dem Kontinent haben wir Massendefizit, im Bereich des Randmeeres, der Geosynklinale, eine im

Verhältnis zur kontinentalen Entlastung wesentlich größere Belastung, das isostatische Gleichgewicht ist dabei verloren gegangen. Ein Ausgleich kann nur durch Hebung und Senkung der einzelnen Massensäulen nach dem AIRYschen Prinzip des Schwimmgleichgewichtes erfolgen. Doch werden jetzt nicht mehr die ganzen Massensäulen kompensiert, sondern nur mehr die *verhältnismäßig geringen Massenänderungen*. Deswegen wird aus der ursprünglichen PRATTschen Massenanordnung im Lauf der Zeit durch AIRYsche Kompensation eine wieder isostatisch kompensierte Massenverteilung hervorgehen, bei der aber die Undulationen der unteren Grenzfläche zwischen Sial und Sima im Verhältnis zu einer nur nach AIRY kompensierten Anordnung sehr gering sind.

Für die AIRYsche Massenanordnung beginnen die Denkschwierigkeiten an der unteren Grenzfläche zwischen Sial und Sima. Alle geologischen Bewegungen erfolgen auch bei einem „stürmischen" Ablauf nach dem gewöhnlichen Zeitbegriff gemessen sehr langsam. Es wird daher trotz der beteiligten großen Massen kaum zulässig sein, solche Vorgänge als adiabatische Vorgänge zu behandeln. Es ist dann schwer verständlich, wie eine AIRYsche Massenanordnung zustande kommen soll, bei der die Sialmassen in Tiefen versenkt werden müssen, in denen der Schmelzpunkt der sie aufbauenden Gesteine erreicht oder überschritten ist. Bei der Langsamkeit der Sinkbewegung wird dem Sial genug Wärme zugeführt, um es in der entsprechenden Tiefe aufzuschmelzen. Die dabei erlangte Mobilität würde im Verein mit der vorausgesetzten Mobilität des Sima, ohne die ein Einsinken gar nicht stattfinden könnte, zu einer Anordnung nach dem hydrostatischen, nicht aber dem isostatischen Gleichgewicht führen. Beim Überschreiten einer bestimmten Tiefe wird daher durch das Aufschmelzen die AIRYsche Massenanordnung abgeschnitten und damit, wegen des einer Niveaufläche grob genäherten Verlaufes der unteren Trennfläche, einer PRATTschen Massenanordnung angenähert. Die Grenze, durch die das AIRYsche Modell in der Tiefe begrenzt wird, ist jene isotherme Fläche, auf der der mittlere Schmelzpunkt des Sial erreicht wird.

Einfache Überlegungen zeigen also, daß praktisch weder eine AIRYsche, noch eine PRATTsche Massenanordnung bestehen kann. Wohl können Ausgleichsbewegungen nach dem AIRYschen Prinzip des Schwimmgleichgewichtes erfolgen, es kann aber dadurch niemals eine AIRYsche Massenanordnung erzeugt werden, wenn das Sial dabei in Temperaturbereiche über seinen Schmelzpunkt versenkt wird. Eine PRATTsche Massenanordnung kann aber nicht bestehen, weil sie durch die Tätigkeit der exogenen Kräfte gestört wird und wir tatsächlich die nicht unbeträchtlichen Vertikalbewegungen messen und aus den geologischen Befunden feststellen können, die das PRATTsche Modell zerstören müssen.

Die Schweremessungen zeigen aber, daß die isostatische Kompensation weitgehend erfüllt ist, die dazu notwendige Massenanordnung muß aber zwischen einer AIRYschen und PRATTschen gelegen sein. Dies ist für die rechnerische Behandlung ein ungünstiger Umstand, da die Massenkompensation bei variabler Dichte und variabler Tiefe der Grenz-

fläche in einer vieldeutigen Weise bewirkt werden kann. Wegen der unteren Begrenzung durch eine isotherme Fläche wird allerdings die Kruste sich mehr an das Prattsche Modell hinsichtlich der konstanten Eintauchtiefe annähern; der dadurch nicht erfaßte Rest wäre durch Variation der Eintauchtiefe nach Airy zu erklären, wobei sich die Undulationen der unteren Grenzfläche in entsprechenden Grenzen zu halten haben. Für die Erklärung der Kompensation darf es daher nicht heißen: Airy oder Pratt, sondern nur: Airy und Pratt.

Sicher ist, daß auch die Airysche Annahme gleicher mittlerer Dichte praktisch nicht zutrifft, sondern nur eine erste Näherung darstellt, die nicht angewendet werden darf, wenn es sich darum handelt, Einzelheiten der Kompensation rechnerisch zu untersuchen. Beispiele für das Bestehen großer Dichteunterschiede in der Horizontalen auch in größerem Bereich wären leicht zu geben. Aber auch in vertikaler Richtung werden schon im Bereich einer Säule Dichteunterschiede auftreten, die nicht immer vernachlässigt werden dürfen. Denn nicht die mittlere Dichte bestimmt den Anteil einer Massensäule am Schwerewert, sondern der wirkliche Dichteverlauf. Eine gleich schwere Massensäule erzeugt trotz der Massenkonstanz an ihrer oberen Begrenzung eine kleinere Schwereanomalie, wenn ihre Dichte von oben nach unten zunimmt als bei umgekehrtem Dichteverlauf. Aus der Schwereverteilung allein darf aber kein zwingender Schluß auf die Massenverteilung gezogen werden, weil die gleiche Schwereverteilung durch viele verschiedene Massenanordnungen erzeugt werden kann.

Das Absinken einer Massensäule bei sedimentärer Belastung erfolgt im Sinne Airys zur Herstellung des Schwimmgleichgewichtes, bis das untere Ende die Schmelzzone erreicht. Im aufgeschmolzenen Material kann aber Mischung mit dem Material des Substratums und damit der zur vollen Kompensation nötige Massenausgleich durch Dichtezunahme erfolgen. Überschreiten des Kompensationsgewichtes führt zu weiterem Absinken und Aufschmelzen der Sialsäule, Unterkompensation führt zur hydrostatischen Hebung, Aufhören des Abschmelzens und dem kompensatorischen Aufsteigen des dichteren Sima. Die überschüssigen Sialmassen werden nicht durch Verdrängen des dichteren Sima kompensiert, sondern durch Aufschmelzen beseitigt.

Die Tatsache, daß wir im Bereich der uns zugänglichen Gesteinshülle die Sedimente nur mit etwa 10% Anteil vertreten finden, deutet auf die bedeutende Rolle hin, die Aufschmelzvorgängen zukommt, die aber geschlossene zyklische Wanderungen der Gesteine zwischen Oberfläche und Tiefe zur Voraussetzung haben. Bei diesen Wanderungen ändert sich die stoffliche Zusammensetzung und der Zustand durch Austausch mit den Stoffen der Tiefe und durch Energiezufuhr aus dem in der Tiefe liegenden Reservoir.

Von besonderer Bedeutung ist die Energiezufuhr, die der Stoff der Kruste, das erstarrte, tote Gestein, aus dem lebendigen, energiegeladenen Stoff der Tiefe, dem Magma, erhält. Das Magma überträgt seine Energie entweder durch Wärmeabgabe und stoffliche Vermischung mit den in

die Tiefe versenkten Sedimenten, oder es wird in die höheren Niveaus der Kruste verdrängt und gehoben und kann von dort aus sich seinen Weg bis zur Oberfläche bahnen, oder allgemeiner ausgedrückt: erhebliche mechanische Arbeit gegen das Schwerefeld leisten. Je fester und dicker die Kruste ist, um so mehr werden die plutonischen Vorgänge, das Eindringen des Magmas in die unteren Stockwerke der Kruste, überwiegen.

Es ist wahrscheinlich, daß an den Orogenesen derartige Vorgänge in sehr erheblichem Ausmaß beteiligt sind. Bei geringer Widerstandsfähigkeit der Kruste überwiegt der Oberflächen-Vulkanismus und dabei wieder die Flächeneruption. Je widerstandsfähiger die Kruste wird, um so mehr überwiegt der Plutonismus und auch bei diesem wieder die lineare oder auf eine kleine Fläche beschränkte Tätigkeit des Magmas. Auch dieses kann dann nur mehr den vereinzelten Schwächezonen im Krustenbau folgen. Das Vordringen des Magmas in die Kruste wird in dieser mechanische Hebung, auf jeden Fall aber Änderungen der Struktur und damit der Dichte bewirken. Es kann im Sinne des PRATTschen Modells Veränderungen der Dichte bewirken, die Rolle der Hefe in einem Teig spielen. Magmakratische Überlegungen erscheinen durchaus berechtigt, wenn auch sie keine Monopolstellung beanspruchen dürfen.

Nimmt man an, daß Perioden der Gebirgsbildung auch Perioden zunächst gesteigerter plutonischer, später auch vulkanischer Tätigkeit sind, dann sind sie mit einer übernormalen, überdurchschnittlichen Energieabgabe aus den obersten Bereichen des noch lebendigen Teils der Erde, den obersten Magmaschichten, verbunden. Gesteigerte Energieabgabe bewirkt stärkere Abkühlung und damit u. U. auch eine gesteigerte Kontraktion. Jedenfalls erscheint es aber am einfachsten zu sein, den Aufbau der Gebirge in der Hauptsache endogen, aus dem inneren Energievorrat der Erde zu erklären, da bis jetzt alle exogenen Erklärungsversuche viel zu kleine Wirkungen liefern.

Aus Untersuchungen der Schwereverteilung allein kann niemals ein sicherer Schluß auf die tatsächliche Massenanordnung der Kruste gezogen werden. Rechnungen haben gezeigt, daß sowohl die Annahme PRATTscher als auch AIRYscher Kompensation die vorhandenen Schwereanomalien gleich gut erklären könnte. Es bedarf anderer Überlegungen und Untersuchungen, um für oder gegen eine dieser Annahmen zu entscheiden.

Einen gewissen Einblick in die Struktur des Untergrundes geben die Methoden der Seismik, aber auch sie können nicht ganz hypothesenfrei angewendet werden, wenn es sich um die Untersuchung großer Tiefen handelt. Zwei Verfahren stehen auch hier zur Verfügung, Refraktions- und Reflexionsseismik.

Man kann zur Untersuchung des tiefen Untergrundes einmal die Fortpflanzung der elastischen Wellen bei natürlichen Beben heranziehen und untersuchen, ob die Laufzeiten jener Wellen, die durch eine mutmaßliche Gebirgswurzel laufen mußten, sich von denen anderer Wellen systematisch unterscheiden. Dieses Verfahren entspricht der Refraktionsseismik, verspricht aber nicht viel Erfolg. Einmal wird sich nur selten

ein hinlänglich starkes Beben ereignen, bei dem die Lage des Epizentrums für die Anwendung der Methode günstig ist, dann wird aber auch der auf die Gebirgswurzel entfallende Anteil des Wellenweges im Verhältnis zum Gesamtweg meist so klein, daß die gefundenen Effekte zweifelhaft sein und in die Fehlergrenzen dieser Methode fallen werden. Gerade bei Nahbeben machen sich die individuellen Eigenheiten des Krustenaufbaues in seinen obersten Teilen in der einzelnen Laufzeitkurve sehr stark fühlbar und es ist dann kaum zu entscheiden, in welches Stockwerk des Aufbaues eine kleine, tatsächlich festgestellte Abweichung wirklich zu verlegen ist. Nur eine hinreichend große und entlang eines Profils gut verteilte Zahl von Stationen kann bei der Refraktionsseismik ausreichende Sicherheit geben, aber gerade eine solche Stationsverteilung fehlt bei der Untersuchung der natürlichen Beben meistens.

Viel aussichtsreicher ist die Reflexionsbeobachtung. Mehrere Versuche aus der jüngsten Vergangenheit, wie z. B. die Beobachtung der Sprengungen im Schwarzwald und Schwäbischen Jura durch J. P. Rothé [*1*] und H. Reich [*2*], haben gezeigt, daß auch aus sehr großer Tiefe Reflexionseinsätze bei Anwendung nicht allzu großer Sprengstoffmengen erhalten werden können. Die vorliegenden seismischen Sondierungen reichen bis etwa 30 km Tiefe. Es ist daher technisch durchaus möglich, auch ohne Anwendung außerordentlich starker Ladungen im Bereich des Zentralalpenkammes Reflexionsbeobachtungen auch aus noch größerer Tiefe zu erlangen. Es ist nur zu prüfen, was Reflexionsbeobachtungen wirklich geben können.

Die Reflexion elastischer Wellen tritt theoretisch an einer jeden Fläche auf, die zwei Medien verschiedener Schallhärte, gemessen durch die Phasengeschwindigkeit der betreffenden Wellenart, trennt. Der Energieanteil, der auf die reflektierte Welle entfällt, hängt von weiteren Bedingungen ab; er ist aber entscheidend dafür, ob im praktischen Fall eine Welle beobachtet werden kann. Ein großer Teil der möglichen Wellen erhält einen so geringen Energieanteil, daß sie nicht beobachtet werden können.

Die Grenzflächen lassen sich in zwei verschiedene Gruppen teilen. Eine Grenzfläche kann einmal zwei stofflich verschiedene Bereiche voneinander trennen, sie kann aber auch die Trennfläche zwischen zwei verschiedenen Zustandsgebieten eines und desselben, also stofflich homogenen Körpers sein.

Es ist kaum anzunehmen, daß bei stofflicher Verschiedenheit trotzdem die Schallhärte der beiden Bereiche gleich sein wird. Wir können daher annehmen, daß stoffliche Verschiedenheit auch immer zum Auftreten von Reflexionen führen kann. Aber auch in einem stofflich homogenen Medium kann an einer Zustandsgrenze, etwa zwischen kristallinem Bereich und dem darunter liegenden geschmolzenen Stoff, die Möglichkeit zum Auftreten von Reflexionen vorhanden sein, weil sich beim Zustandswechsel die elastischen Konstanten (z. B. hier die Formfestigkeit) erheblich, die Dichte aber nur sehr wenig ändern werden.

Durch Reflexionen werden wohl Schichtgrenzen erhalten, aber auch hier ist zunächst ihre Deutung als stoffliche Trennfläche nicht sicher. Bei Annahme eines Krustenmodells, wie es hier aus einer Synthese AIRYscher und PRATTscher Vorstellungen aufgebaut wurde, hat man in einer bestimmten Tiefe auf jeden Fall eine Diskontinuitätsfläche zu erwarten: nämlich dort, wo die Schmelzisotherme verläuft. Ob diese Fläche aber auch gleichzeitig eine Trennfläche zwischen Sial und Sima ist, kann durch Reflexionen allein nicht mit Sicherheit ermittelt werden. Auch die Reflexionsseismik gibt bei der Untersuchung der tieferen Schichten des Krustenaufbaues keine eindeutigen Ergebnisse.

Literatur.

1. ROTHÉ, J. P. et E. PETERSCHMITT: Etude séismique des explosions d'Haslach. Ann. Inst. Phys. Globe, Univ. Strasbourg, N. Sér. 5, Part 3, 13 (1950)
2. REICH, H.: Über reflexionsseismische Beobachtungen der PRAKLA aus großen Tiefen ... Bulletin d'Information de l'UGGI, 2e année, No. 2, 1953, p. 229—232.

550.38

Die magnetischen Elemente D, I, H und ihre Isoporen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel.

Von

A. Pühringer, Wien.

Mit 11 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden Gleichungen für die magnetischen Elemente und ihre Isoporen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel (bzw. eines zentrischen Dipols) abgeleitet, der Kurvenverlauf der isomagnetischen Linien ausführlich diskutiert und die singulären Punkte aufgezeigt. Außerdem sind Karten der isomagnetischen Linien in Orthogonalprojektion, die eine besonders übersichtliche Darstellung ermöglicht, gezeichnet worden.

Auf diese Weise werden nicht nur frühere Ergebnisse CHAPMAN'S bestätigt, sondern darüber hinaus wird für die Isogonen und die D-Isoporen eine anschauliche geometrische Deutung gegeben und für die I-Isoporen und H-Isoporen (für letztere im allgemeinen) gezeigt, daß die magnetischen Pole außer ungleichförmigen Strahlenpolen zusätzlich noch Spitzen sind.

Summary. Equations for the magnetic elements and their isopors are derived for the field of a homogeneously magnetized sphere (a centrical dipole), the curves of the isomagnetic lines are thoroughly discussed, and the singular points indicated. Furthermore, maps of the isomagnetic lines were designed in orthogonal projection by which a very clear representation becomes possible.

Thus not only previous results found by CHAPMAN are confirmed, but moreover a clear geometrical interpretation is given for the isogons and D-isopors. It is shown for the I-isopors and H-isopors (for the latter ones in general) that the magnetic poles are not only to be considered as non-uniform ray-poles but also as points.

Résumé. L'auteur établit des relations mathématiques concernant les éléments magnétiques et leurs isopores pour le champ d'une sphère magnétique homogène (ou d'un dipôle centré), il discute la forme des lignes isomagnétiques et repère des points singuliers. Dessin de cartes des lignes isomagnétiques en projection orthogonale permettant une représentation particulièrement claire.

De cette façon, non seulement de précédents résultats de CHAPMAN reçoivent confirmation, mais on peut encore donner une signification géométrique des isogones et des isopores D et montrer que pour les isopores I et les isopores H les pôles magnétiques sont non seulement des pôles irrégulièrement rayonnants, mais aussi des pointes.

Einleitung.

Das Potential einer homogen magnetisierten Kugel kann mathematisch durch das Potential eines magnetischen Dipols, der sich im Kugelzentrum befindet, ausgedrückt werden und ist gleich dem skalaren Produkt:

$$V = \frac{\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{r}}{r^3}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{M}$ das magnetische Moment des Dipols, $\mathfrak{r}$ den Ortsvektor und r die Entfernung vom Kugelzentrum, in welches der Koordinatenursprung gelegt wurde, bedeutet. Daraus läßt sich das magnetische Feld durch eine Differentialoperation ableiten:

$$\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} V. \tag{2}$$

In räumlichen Polarkoordinaten lautet Gleichung (1), wenn die Richtung von $\mathfrak{M}$ in die negative Richtung der Polarachse weist und χ den Polabstand vom magnetischen Pol bedeutet:

$$V = -\frac{M}{r^2} \cos \chi. \tag{3}$$

Da für erdmagnetische Studien nur das Feld an der Erdoberfläche bedeutungsvoll ist, sei r der mittlere Erdradius.

Wenn man die Differentialoperation (2) durchführt, zerfällt $\mathfrak{F}$ in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten; in die Vertikalintensität

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2 \cdot M}{r^3} \cos \chi \tag{4}$$

und in die Horizontalintensität

$$H = -\frac{\partial V}{\partial \chi} = \frac{M}{r^3} \sin \chi. \tag{5}$$

I. Die magnetischen Elemente.

A. Die Deklination.

Wie aus Abb. 1 hervorgeht, ist die Deklination D der Winkel BPN (ostwärts von Nord positiv gerechnet). Eine Isogone ist demnach für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel der geometrische Ort der Spitzen aller sphärischen Dreiecke, die BN bzw. SA als Basis haben und deren Winkel an der Spitze konstant ist. Da D durch den Bezug auf ein Koordinatensystem der Lage auf der Erdoberfläche definiert ist, ist sie eine „relative" Funktion. Im Gegensatz dazu sind die Inklination und die Horizontalintensität „wahre" Funktionen.

Zur Ableitung von Polargleichungen für die Isogonen können auf das sphärische Dreieck BNP verschiedene Lehrsätze der sphärischen Trigonometrie angewendet werden:

a) Der Cotangentensatz liefert zwei Polargleichungen der Isogonen:

$$\cos \Theta \cos \Phi = \sin \Theta \cot \alpha - \sin \Phi \cot D\,; \tag{6}$$

diese Gleichung gilt relativ zu N als Pol.

Die entsprechende Polargleichung relativ zu B lautet:

$$\cos\chi\cos\Psi = \sin\chi\cot\alpha - \sin\Psi\cot D. \qquad (7)$$

b) Zwei Formen der Cosinusformel:

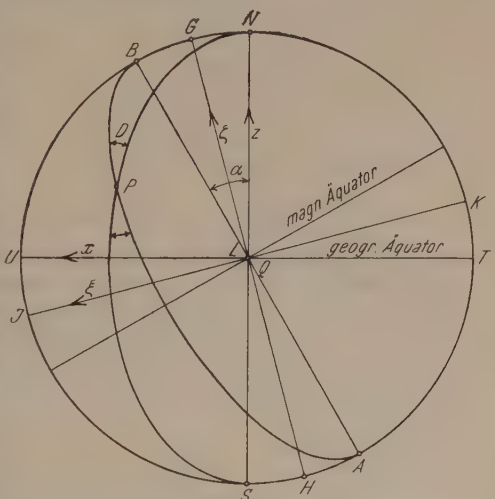
$$\cos\alpha = \cos\Theta\cos\chi + \sin\Theta\sin\chi\cos D, \qquad (8)$$

$$\cos D = -\cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\alpha \qquad (9)$$

stehen zu beiden Polen N und B in Beziehung und können daher bipolar genannt werden (siehe [*1*], §§ 3, 4).

Es ist zu beachten, daß für D nicht das in der Praxis gebräuchliche Vorzeichen in die Formel eingeht; D ist hier westwärts von Nord als positiv anzunehmen.

Die Polargleichungen für die Isogonen enthalten nur Winkelbeziehungen und sind vom Betrage des magnetischen Momentes unabhängig. Alle gleichgerichteten zentrischen Dipole haben daher gleiche Isogonenkarten.



N,S.. geographische Pole — D = Deklination
B,A... magnetische Pole — χ = *BP*
α..... Neigung zwischen magnetischer und geographischer Achse — Θ = *NP*; Φ = *BNP*
NPS.. geographischer Meridian — Ψ = *NBP*
BPA.. magnetischer Meridian

Abb. 1. Geographisches und magnetisches Koordinatensystem.

1. Die geometrischen Eigenschaften der Isogonen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel.

Wie aus Abb. 1 hervorgeht, sind die Isogonen zur Ebene, welche die Kugel im Großkreis $BNAS$ schneidet, spiegelsymmetrisch. Dieser Großkreis, in dem geographischer und magnetischer Meridian zusammenfallen, ist aus den Nullisogonen NKA, SJB und den 180°-Isogonen BGN, AHS zusammengesetzt. Dies sind im allgemeinen die einzigen Isogonen, welche ebene Kurven sind. Zwei weitere Symmetrieebenen der Isogonen schneiden die Kugel in den Großkreisen $GLHQ$ und $JLKQ$.

Diese drei aufeinander senkrecht stehenden Symmetrieebenen legen ein bevorzugtes orthogonales Koordinatensystem ξ, η, ζ fest; und zwar liegen die Kugeldurchmesser KJ, QL, HG jeweils in der ξ, η, ζ-Richtung. Um die Polargleichung (6) in dieses Koordinatensystem zu transformieren, wird zunächst mit den Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cdot\sin\Theta\cos\Phi \\ y &= r\cdot\sin\Theta\sin\Phi \\ z &= r\cdot\cos\Theta \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

ein cartesisches Koordinatensystem x, y, z festgelegt, so daß die Kugeldurchmesser TU, QL, SN in der x, y, z-Richtung liegen. Wenn (6) mit $r^2 \cdot \sin \Theta$ multipliziert wird, so folgt mit (10):

$$x \cdot z = (r^2 - z^2) \cdot \cot \alpha - r \cdot y \cdot \cot D. \qquad (11)$$

Man gelangt nun in das Koordinatensystem ξ, η, ζ durch Drehung des Koordinatensystems x, y, z um die y-Achse $\left(\text{Drehwinkel} = \frac{\alpha}{2}\right)$; die entsprechenden Transformationsgleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} x &= \xi \cos \frac{\alpha}{2} + \zeta \sin \frac{\alpha}{2} \\ y &= \eta \\ z &= -\xi \sin \frac{\alpha}{2} + \zeta \cos \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Aus Gleichung (11) wird dann

$$\xi^2 \cot \frac{\alpha}{2} - \zeta^2 \tan \frac{\alpha}{2} + 2\,\eta^2 \cot \alpha - 2 \cdot r \cdot \eta \cot D = 0. \qquad (13)$$

(siehe auch [*1*], § 6, Gleichung (11)).

Dies läßt eine interessante geometrische Deutung für die Isogonen zu. Da die Gleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2$ gilt, kann man Gleichung (13) in drei Varianten schreiben, die je ein Koordinatenpaar $\xi\,\eta$; $\eta\,\zeta$; $\xi\,\zeta$ enthalten, entsprechend den drei Orthogonal-Projektionen auf die Koordinatenebenen; davon sind die beiden ersten Gleichungen einfache analytische Ausdrücke;

Gleichung I: $$\xi^2 + \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\eta^2 - 2 \cdot r \cdot \eta \tan \frac{\alpha}{2} \cot D\right) = r^2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}. \qquad (14)$$

Ergänzt man zum Quadrat und setzt für

$$\frac{r \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}{\sin D} = a, \text{ für } a \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = b, \qquad (15\text{a, b})$$

so erhält man: $$a^2 \cdot \zeta^2 + b^2 \cdot (\eta - a \cdot \cos D)^2 = a^2 \cdot b^2. \qquad (16)$$

Auf die gleiche Weise erhält man für Gleichung II, wenn man für

$$\frac{r \cdot \cot \frac{\alpha}{2}}{\sin D} = a^* \text{ und für } a^* \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = b^* \text{ setzt:} \qquad (17\text{a, b})$$

$$a^{*2} \cdot \zeta^2 + b^{*2} \cdot (\eta + a^* \cdot \cos D)^2 = a^{*2} \cdot b^{*2}. \qquad (18)$$

Da die Gleichungen (16) und (18) Ellipsengleichungen sind, können die Isogonen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel als Durchdringungen von geraden elliptischen Zylindern mit der Kugel gedeutet werden. Dadurch wird es möglich, Isogonenkarten mit den Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie zu konstruieren.

2. Diskussion.

In den Abbildungen 2a, b, c werden die Isogonen in den drei Orthogonalprojektionen — Grundriß, Aufriß, Seitenriß — dargestellt. Um ein übersichtliches Bild zu erhalten und den Verlauf einer Knotenlinie

zu zeigen, wurde die Neigung der magnetischen Achse α in den Abbildungen mit 30^0 angenommen.

Abb. 2a zeigt die Ellipsen der Zylinder für verschiedene D-Werte. Die großen Achsen (2a) liegen alle in der η-Achse, die kleinen Achsen (2b) sind zur ξ-Achse parallel. Ihre Größen sind durch die Gleichungen (15a, b) bestimmt. Die η-Koordinate des Ellipsenmittelpunktes ist, wie aus Gleichung (16) hervorgeht, gleich $\alpha \cdot \cos D$. Da α konstant ist, sind alle Ellipsen ähnlich.

Die Punkte B, N, S, A sind gleichförmige Strahlenpole der Isogonen. Dies geht auch aus den Polargleichungen hervor, wenn man die Polkoordinaten einsetzt. An den Polen selbst ist die Deklination unbestimmt und durchläuft, wenn man um einen dieser vier Punkte einen kleinen Kreis beschreibt, den gesamten Wertevorrat der Isogonen von $2 \cdot 180^0 = 360^0$. Jede Isogone D verläßt jeden der vier Strahlenpole unter einem Winkel D zur Nullisogone.

Auch in der Abb. 2b, der Projektion auf die $\eta\zeta$-Ebene, sind die Isogonen Ellipsen, deren halbe Achsen a^* und b^* durch die Gleichungen (17a, b) bestimmt sind.

Die Isogonen $D = \pm\, \alpha$ sind Knotenlinien mit zwei Knoten in L und Q, den Schnittpunkten zwischen dem magnetischen und dem geographischen Äquator. Die Krümmung der Knotenzylinder in L und Q ist: $\frac{b^2}{a} = \frac{b^{*2}}{a^*} = \frac{r}{2}$, also unabhängig

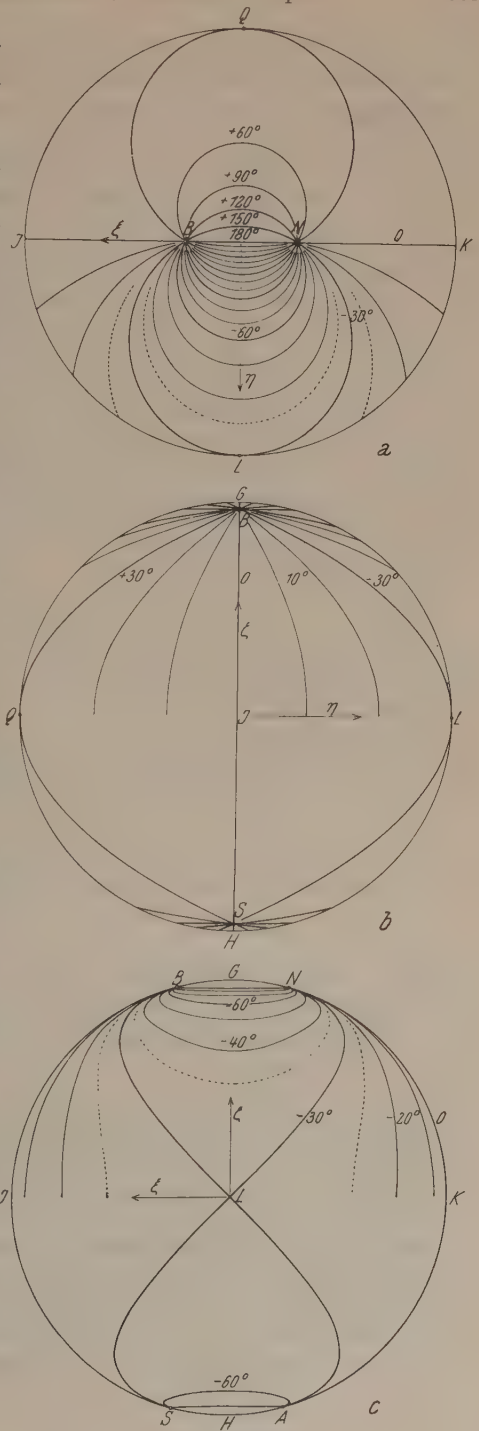


Abb. 2. Isogonen.

von α; die Knotenwinkel sind somit konstant, wie groß oder wie klein α auch sein möge. Die Knotenlinie verschwindet erst, wenn $\alpha = 0$ ist. Für den besonderen Fall, daß $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, gibt es nur je einen Knotenzylinder und in den Gleichungen (15a, b) und (17a, b) wird $a = a^* = r$ und $b = b^* = \frac{r}{\sqrt{2}}$; die Ellipsen in den Abbildungen 2a und 2b haben dann gleiche Achsenverhältnisse und die Knotenisogonen bestehen aus zwei größten Kugelkreisen, die aufeinander senkrecht stehen, dem magnetischen und dem geographischen Äquator. Die Knotenwinkel sind daher für beliebige $\alpha \neq 0$ immer rechtwinkelig.

Wenn $|D| < \alpha$ ist, schneiden die Isogonen den Äquator des Poles G und enden an den Polen der anderen Hemisphäre. Die Isogonen $|D| > \alpha$ bleiben innerhalb des Gebietes, das von den beiden Ästen der Knotenkurve eingeschlossen wird (Abb. 2c).

Wenn $\alpha \to 0$, wird in Abb. 2a nach (15a, b) $a = b = \frac{r}{2}$, und die elliptischen Knotenzylinder werden Kreiszylinder. In Abb. 2b jedoch arten die elliptischen Knotenzylinder zu parabolischen Zylindern aus. Ihre Gleichung ist nach (18): $\zeta^2 = r \cdot (r - \eta)$. Ein ähnlicher Fall ist auch für die D-Isoporenkarte von Bedeutung.

Wenn $r \to \infty$, der lineare Abstand BN jedoch erhalten bleibt, geht ebenfalls $\alpha \to 0$; die Ellipsen der Abb. 2a werden zu Kreisen und dieser Spezialfall geht in den Satz der ebenen Geometrie von den „gleichen Peripheriewinkeln" über.

Eine Weltkarte der Isogonen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel weist demnach sechs singuläre Punkte auf: vier Strahlenpole und zwei rechtwinkelige Knoten (in Übereinstimmung mit [1]).

B. Die Inklination.

Die Inklination I kann durch die Gleichung

$$\tan I = \frac{Z}{H} \tag{19}$$

errechnet werden. Wenn man für Z und H die Gleichungen (4) und (5) einsetzt, so nimmt (19) für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel die Form einer Polargleichung für die Isoklinen an:

$$\tan I = 2 \cdot \cot \chi. \tag{20}$$

Auch diese Polargleichung ist vom Betrage des magnetischen Momentes unabhängig. Da die Inklination außerdem eine „wahre" Funktion, d. h. unabhängig von einem willkürlich festgelegten Koordinatensystem der Lage ist, zeigen alle zentrischen magnetischen Dipole gleichen Kurvenverlauf der Isoklinen.

Diskussion. Die Isoklinen sind Parallelkreise, die auf die Dipolachse senkrecht stehen. Ihr Wert ist am magnetischen Äquator Null und erreicht die Extreme $+ 90^0$ und $- 90^0$ am nördlichen (B) und südlichen (A) magnetischen Pol ($\chi = 0, \pi$). In den Abbildungen 3a, b wird der Verlauf der Isoklinen in zwei Orthogonalprojektionen dargestellt.

Eine Weltkarte der Isoklinen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel enthält daher nur zwei singuläre Punkte; nämlich zwei kreisförmige Brennpunkte an den magnetischen Polen mit den Extremwerten $+ 90^0$ oder $- 90^0$.

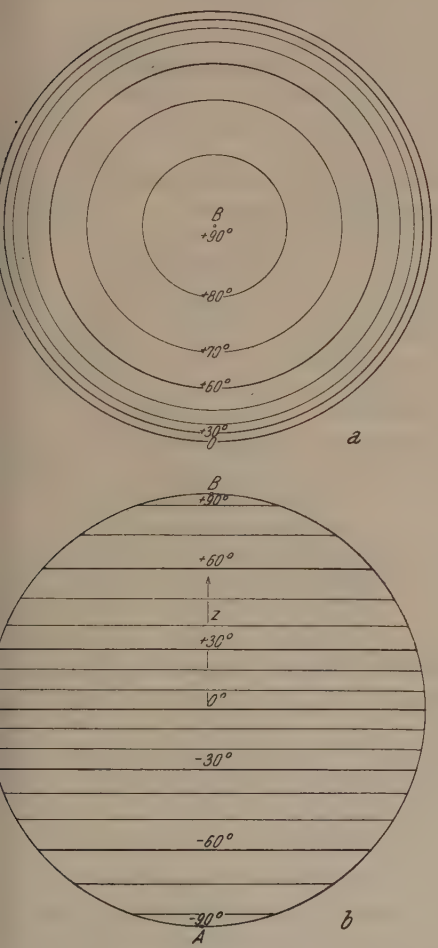


Abb. 3 Isoklinen.

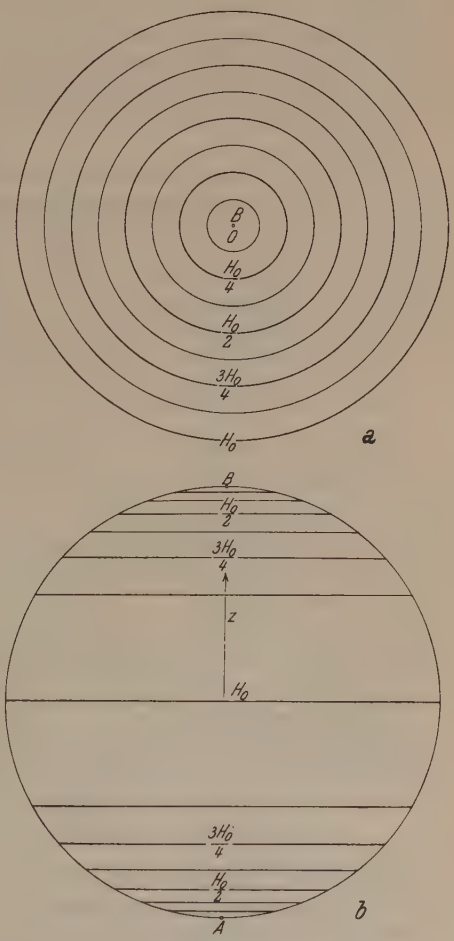


Abb. 4 *H*-Isodynamen.

C. Die Horizontalintensität.

Für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel ist die Horizontalintensität H durch Gleichung (5) gegeben. Setzt man für $\frac{M}{r^3} = H_o$, d. i. die Intensität am magnetischen Äquator $\left(\chi = \frac{\pi}{2}\right)$, so kann Gleichung (5) auch geschrieben werden:

$$H = H_o \cdot \sin \chi. \qquad (21)$$

H ist eine „wahre" Funktion, die dem magnetischen Moment M proportional ist.

Diskussion. Die H-Isodynamen sind Parallelkreise, die auf die Dipolachse senkrecht stehen. Ihren größten Wert H_0 erreichen sie längs des magnetischen Äquators. An den beiden Polen (B, A) ist $H = 0$; diese sind kreisförmige Brennpunkte für die Isodynamen. Da χ nur zwischen den Grenzen 0 bis π definiert ist, ist H über die gesamte Kugel positiv. Abb. 4a, b zeigt wieder zwei Orthogonalprojektionen der H-Isodynamen. Die Parallelkreise der Abb. 4a sind in der Projektion äquidistant.

II. Die Isoporen der magnetischen Elemente für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel.

Eine isomagnetische Karte gibt eine graphische Darstellung der Verteilung einer skalaren Funktion Φ, einer Eigenschaft oder eines Elementes des geomagnetischen Feldes auf der Erdoberfläche, indem sie Kurven aufweist, längs deren der Wert von Φ konstant ist. Mit jedersolchen Karte ist eine Isoporenkarte verknüpft, welche in der gleichen Weise die Verteilung von $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (oder $\dot{\Phi}$) zeigt.

Da laut Voraussetzung die Kugel immer homogen magnetisiert bleiben soll, kann die zeitliche Änderung des magnetischen Momentes $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ in zwei Anteile zerlegt werden:

a) in eine Änderung des Betrages von $\mathfrak{M}$ und

b) in eine Rotationsbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ (vom Betrage ω).

In einem Kugelkoordinatensystem r, χ, ψ mit B als Pol kann durch Drehung um die Polarachse der Nullmeridian immer so gelegt werden, daß die ψ-Komponente von $\mathfrak{w}$ verschwindet. Die Koordinaten dieses gedrehten Systems seien r, χ, λ. Der Meridian $\lambda = 0$ steht dann auf die momentane Drehachse senkrecht und der nördliche magnetische Pol B bewegt sich in die Richtung dieses Nullmeridians.

A. Die Isoporen der Deklination.

a) Wenn sich nur der Betrag des magnetischen Momentes ändert, ist $\dot{D}$, da D von M unabhängig ist, überall gleich Null. Nur Drehbewegungen von $\mathfrak{M}$ können daher D-Isoporenkarten erzeugen.

b) Der magnetische Pol B verschiebt sich während der Rotation des Dipols in der Zeit Δt um $r \cdot \Delta \alpha$ nach B' (Abb. 5). Die Änderung der Deklination ΔD in P ist der Winkel, der von den beiden Meridianen λ und λ' eingeschlossen wird. Wenn man auf das sphärische Dreieck $BB'P$ den Sinussatz anwendet, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\sin \Delta D}{\sin \lambda} = \frac{\sin \Delta \alpha}{\sin \chi'}. \tag{22}$$

Da $\Delta \alpha$ und ΔD sehr kleine Winkel sind, kann (22) auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\Delta D}{\Delta t} \cdot \sin \chi' = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \sin \lambda. \tag{23}$$

Geht man zu den Differentialen über, so wird $\chi' = \chi$ und es folgt die Polargleichung für die D-Isoporen:

$$\dot{D} = \frac{\omega \sin \lambda}{\sin \chi} \tag{24}$$

(in Übereinstimmung mit [2] § 5, Gl. (30)).

Multipliziert man Gleichung (24) mit $r^2 \cdot \sin \chi$ und führt durch die Transformationsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \chi \cos \lambda \\ y &= r \cdot \sin \chi \sin \lambda \\ z &= r \cdot \cos \chi \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ein cartesisches Koordinatensystem* ein, so kann man wieder wie in A1 Gl. (24) in drei Varianten schreiben, die je ein Koordinatenpaar xy, yz, xz enthalten, entsprechend den drei Orthogonalprojektionen auf die Koordinatenebenen; davon sind die ersten beiden Gleichungen einfache analytische Ausdrücke:

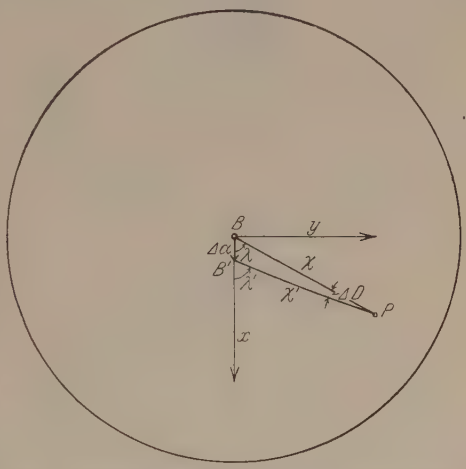


Abb. 5. Änderung der Deklination bei Verschiebung des magnetischen Pols.

$$\text{I:} \qquad x^2 + \left(y - \frac{r \cdot \omega}{2 \cdot D}\right)^2 = \frac{r^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot \dot{D}^2} \tag{26}$$

$$\text{II:} \qquad \dot{D}\,(r^2 - z^2) = r \cdot \omega \cdot y \tag{27}$$

Da die Gleichungen (26) Kreisgleichungen, (27) Parabelgleichungen sind, können die D-Isoporen für das Feld einer homogen magnetisierten Kugel als Durchdringungen von geraden Kreiszylindern, bzw. von geraden parabolischen Zylindern mit der Kugel gedeutet werden.

Diskussion. Abb. 6a zeigt die projizierenden Kreiszylinder für verschiedene $\dot{D}$-Werte. Alle Kreiszylinder haben die xz-Ebene, in der die Nullisopore liegt, als gemeinsame Tangente und ihre Achsen, die zur magnetischen Achse AB parallel sind, liegen in der yz-Ebene.

Der magnetische Pol bewegt sich infolge der Drehbewegung in Richtung der positiven x-Achse. Wenn man mit dem Pol in der Bewegungsrichtung fortschreitet, befindet sich das Gebiet der positiven D-Isoporen zur rechten Hand. (Dies gilt für beide Pole.) Nähert man sich einem Pol längs eines magnetischen Meridians, mit Ausnahme der Meridiane $\lambda = 0, \pi$, so geht $\dot{D}$ gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$. B und A können

* Diese x, y, z-Koordinaten sind im allgemeinen nicht mit den x, y, z-Koordinaten der Gleichung (10) identisch.

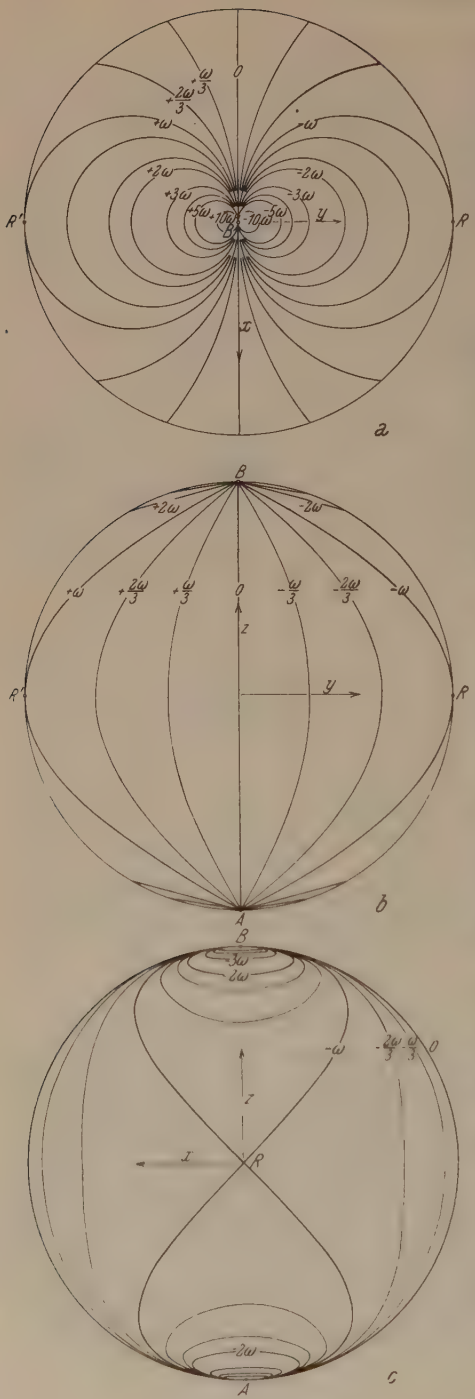


Abb. 6. D-Isoporen.

daher als Doppelfoki für $\dot{D}$ angesehen werden ([2], § 5). Alle D-Isoporen verlassen die magnetischen Pole tangential zur Nullisopore. Die geographischen Pole N, S sind im allgemeinen keine singulären Punkte der D-Isoporen.

Die Isoporen $\dot{D} = +\omega$ oder $-\omega$ sind Knotenlinien, mit den Knoten in R und R' (Abb. 6c). Diese Knoten fallen im allgemeinen nicht mit den Knoten der Deklination zusammen. Da die Krümmung der Knotenzylinder in R und R gleich $\frac{r}{2}$ ist, sind es rechtwinkelige Knoten.

Die Isoporen $|\dot{D}| < \omega$ schneiden den magnetischen Äquator und enden an dem Pol der anderen Hemisphäre, die Isoporen $|\dot{D}| > \omega$ bleiben innerhalb des Gebietes, das von den beiden Ästen der Knotenkurve eingeschlossen wird.

In Abb. 6b sind die Isoporenzylinder nach Gleichung (27) parabolisch.

B. Die Isoporen der Inklination.

Wie in A können wieder nur Drehbewegungen des Dipols eine zeitliche Änderung der Lage der Isoklinen auf der Kugeloberfläche bewirken.

Gleichung (20) nach der Zeit differentiert lautet:

$$\dot{I} \cdot \sin^2 \chi = -2 \cdot \dot{\chi} \cos^2 I. \quad (28)$$

Aus (20) folgt:

$$\cos^2 I = \frac{1}{1 + 4 \cdot \cot^2 \chi};$$

dies in (28) eingesetzt ergibt:

$$\dot{I} \cdot (\sin^2 \chi + 4 \cdot \cos^2 \chi) = \\ = -2 \cdot \dot{\chi}. \quad (29)$$

$\dot{\chi}$ ist entlang dem Meridian $\lambda = 0$ gleich der augenblicklichen negativen Winkelgeschwindigkeit ω des Dipols. Entlang irgendeines Meridians λ gilt für $\dot{\chi}$ die Beziehung:

$$\dot{\chi} = -\omega \cdot \cos\lambda. \qquad (30)$$

Dies in (29) eingesetzt ergibt für $\dot{I} = \text{const}$ die Polargleichung für die Isoporen der Inklination:

$$\cos\lambda = \frac{\dot{I}}{2 \cdot \omega}(1 + 3 \cdot \cos^2\chi)$$

oder (31)

$$\cos\lambda = \frac{2 \cdot \dot{I}}{\omega}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\chi\right)$$

Diskussion. Wenn $\chi \to 0$, wird (31) zu $\cos\lambda = \frac{2 \cdot \dot{I}}{\omega}$; $\dot{I}$ ist daher an den magnetischen Polen unbestimmt, besitzt jedoch, wenn man um einen der Pole einen kleinen Kreis beschreibt, einen kontinuierlichen Wertevorrat von 2mal $-\frac{\omega}{2}$ bis $+\frac{\omega}{2}$. Die magnetischen Pole sind demnach (in Übereinstimmung mit [2] § 8) ungleichförmige Strahlenpole für die Isoporen der Inklination. Außerdem sind sie aber noch doppelte Spitzen für die Isoporen $\dot{I} = \pm\frac{\omega}{2}$ (Abb. 7a).

Die Nullisopore bildet den aus den beiden Meridianen $\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ zusammengesetzten Großkreis. Sie steht auf die Bewegungsrichtung der magnetischen Pole senkrecht und der nördliche Pol B bewegt sich in Richtung der positiven Hemisphäre der $\dot{I}$.

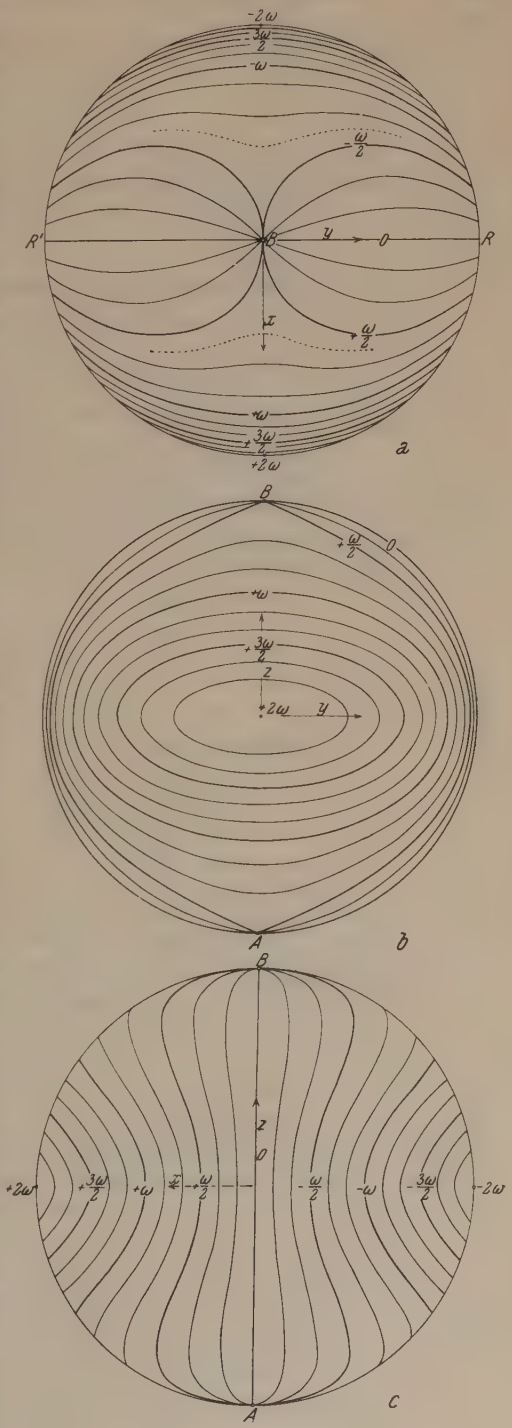


Abb. 7. I-Isoporen.

$\dot{I}$ aus der Gleichung (31) explizite ausgedrückt gibt:

$$\dot{I} = \frac{2 \cdot \omega \cos \lambda}{1 + 3 \cdot \cos^2 \chi}.$$

$\dot{I}$ hat demnach die Extrema $\pm 2 \cdot \omega$ an der Stelle $\chi = \frac{\pi}{2}$; $\lambda = 0, \pi$. Diese Punkte sind Foki für $\dot{I}$ (Abb. 7b). Nahe den Brennpunkten sind die Isoporen Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $1 : \sqrt{6}$.

C. Die Isoporen der Horizontalintensität.

Gleichung (21) nach der Zeit differentiert lautet:

$$\dot{H} = \dot{H}_0 \sin \chi + H_0 \dot{\chi} \cos \chi. \tag{32}$$

Wenn man für $\dot{\chi}$ Gleichung (30) setzt, so folgt:

$$\dot{H} = \dot{H}_0 \sin \chi - H_0 \omega \cos \chi \cos \lambda. \tag{33}$$

Die Isoporen der Horizontalintensität sind die Kurven $\dot{H} = \text{const}$.

Je nachdem wie über die Werte $\dot{H}_0$ und $H_0 \omega$ verfügt wird, sind folgende Fälle möglich:

1.	$\dot{H}_0 = 0$	$H_0 \omega = 0$
2.	$\dot{H}_0 \neq 0$	$H_0 \omega = 0$
3.	$\dot{H}_0 = 0$	$H_0 \omega \neq 0$
4.	$\dot{H}_0 \neq 0$	$H_0 \omega \neq 0$,

für den Fall 4. der eine Addition von 2. und 3. darstellt, sind 3 Varianten möglich:

a) $|\dot{H}_0| < |H_0 \omega|$
b) $|\dot{H}_0| = |H_0 \omega|$
c) $|\dot{H}_0| > |H_0 \omega|$

1. Wenn $\dot{H}_0 = 0$ und $H_0 \omega = 0$, so ist $\dot{H}$ überall Null, das Feld erleidet keine zeitliche Veränderung und es gibt daher keine Isoporenkarten.

2. Wenn $\dot{H}_0 \neq 0$, $H_0 \omega = 0$, so ändert sich lediglich der Betrag des magnetischen Momentes; (33) reduziert sich dann zu

$$\dot{H} = \dot{H}_0 \sin \chi \tag{34}$$

und ist formal identisch mit (21). $\dot{H}$ ist daher an den magnetischen Polen gleich Null und erreicht das Extrem + oder $-\dot{H}_0$ (Vorzeichen je nach Zu- oder Abnahme von M) längs des magnetischen Äquators. Der Kurvenverlauf der $\dot{H}$-Isoporen ist dem Kurvenverlauf für die Horizontalintensität (siehe Abb. 4a, b) gleich, nur ist für die Werte von $\dot{H}$ entweder + oder $-\dot{H}_0$ zu setzen.

3. Wenn $\dot{H}_0 = 0$, $H_0 \omega \neq 0$, bleibt der Betrag von $\mathfrak{M}$ konstant; es findet nur eine Drehbewegung statt. Gleichung (33) reduziert sich dann zu:

$$\dot{H} = -H_0 \omega \cos \chi \cos \lambda. \tag{35}$$

$\dot{H}$ ist an den magnetischen Polen unbestimmt und besitzt, wenn λ die Werte von 0 bis $2 \cdot \pi$ durchläuft, einen kontinuierlichen Wertevorrat von 2mal $-H_0\omega$ bis $+H_0\omega$. B und A sind daher ungleichförmige Strahlenpole für $\dot{H}$, die den gesamten Wertevorrat in sich vereinigen. Mit Ausnahme der Nullisoporen kehren sämtliche Isoporen, die von einem Pol ausgehen, wieder zum gleichen Pol zurück (Abb. 8a, b, c). Der nördliche magnetische Pol B bewegt sich senkrecht zur Nullisopore in Richtung der negativen Viertelkugel.

Wenn $\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ und wenn $\chi = \frac{\pi}{2}$, so wird $\dot{H} = 0$. Die Nullisoporen sind daher der magnetische Äquator und der von den magnetischen Meridianen $\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ gebildete Großkreis. Ihre Schnittpunkte sind rechtwinkelige Knoten R, R' (Abb. 8c) für $\dot{H} = 0$.

4. Wenn $\dot{H}_0 \neq 0$, $H_0\omega \neq 0$, bleibt die Singularität der magnetischen Pole wie in 3., nämlich ungleichförmige Strahlenpole zu sein, erhalten, nur enthalten diese nicht mehr den gesamten Wertevorrat und sind außerdem einfache Spitzen für die Isoporen $+$ oder $-H_0\omega$ (negatives Vorzeichen bei Abnahme von M) (Abb. 9a, 10a, 11a).

Wie eine einfache Extremuntersuchung von (33) zeigt, ist $\dot{H}$ ein Extrem an der Stelle

$$\lambda = 0, \quad \tan\chi = \frac{\dot{H}_0}{H_0\omega}. \qquad (36)$$

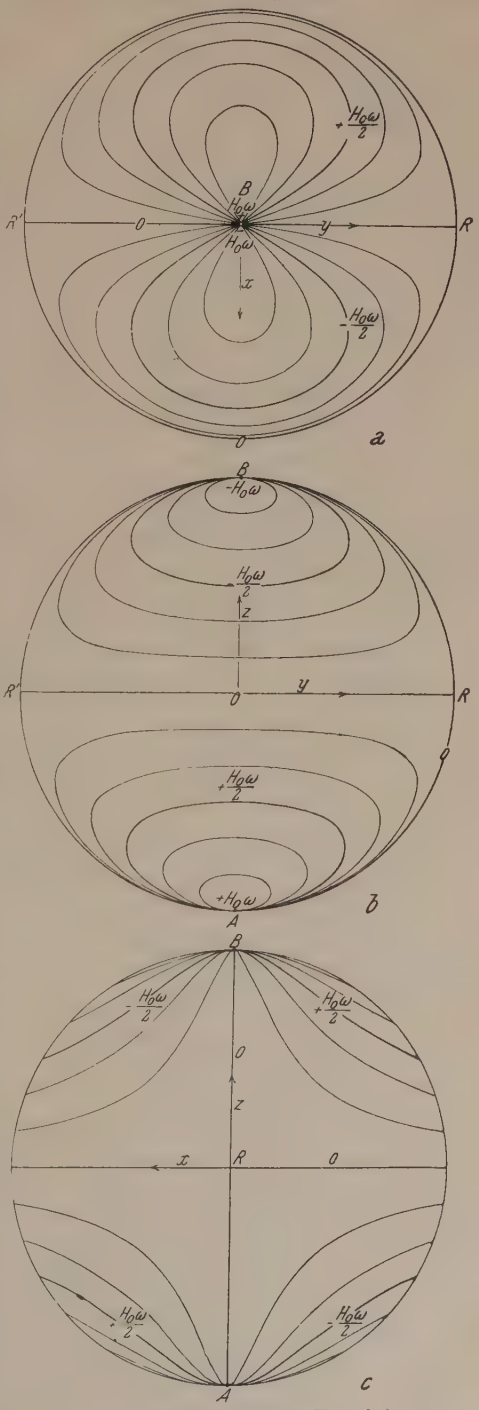


Abb. 8. H-Isoporen $H_0 = 0$, $H_0\omega \neq 0$.

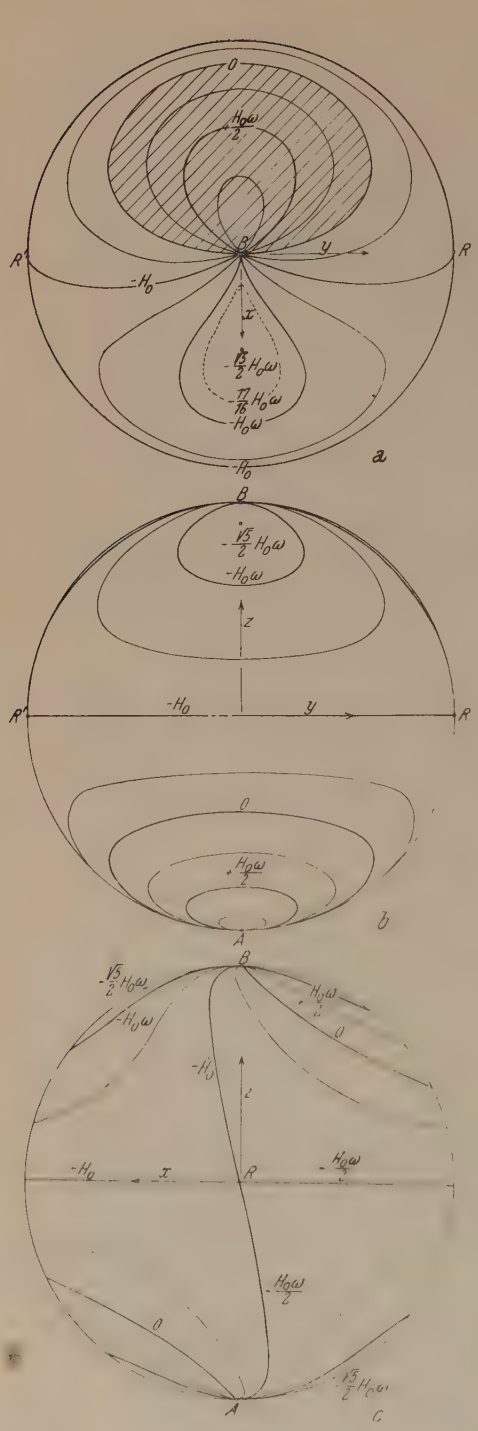


Abb. 9. $\dot{H}o = -\frac{H_0\omega}{2}$.

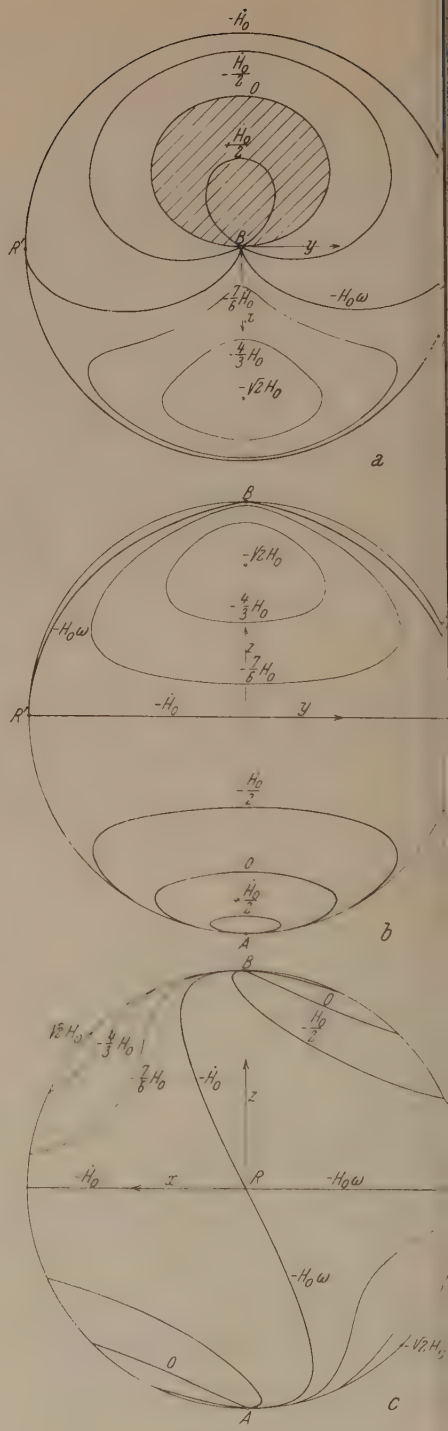


Abb. 10. $\dot{H}_0 = H_0\omega$
H-Isoporen.

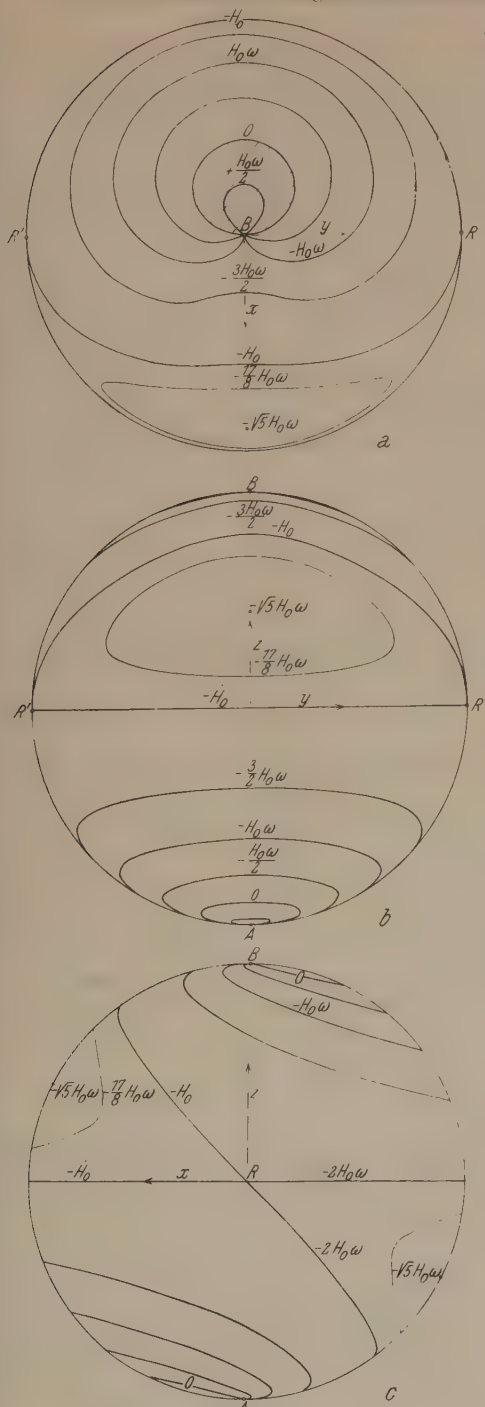


Abb. 11. H-Isoporen $\dot{H}o = 2\,H_o\omega$.

Dieser Punkt ist ein Fokus für die Isoporen

$|\dot{H}| > |\dot{H}_o\omega|$ (wenn $|H_o\omega| \geqq |\dot{H}_o|$)

oder

$|\dot{H}| > |\dot{H}_o|$ (wenn $|H_o\omega| \leqq |\dot{H}_o|$)

(Abb. 9b, 10b, 11b). (36) in (33) eingesetzt gibt als Extrem für $\dot{H}$:

$$\dot{H}_E = \sqrt{(\dot{H}_o)^2 + (H_o\omega)^2}\,. \quad (37)$$

Gemäß (33) wird $\dot{H} = \dot{H}_o$, wenn $\chi = \frac{\pi}{2}$ oder wenn

$$\dot{H}_o(1 - \sin\chi) + H_o\omega\cos\chi\cos\lambda = 0\,. \quad (38)$$

Die Isopore $\dot{H}_o$ bildet daher den magnetischen Äquator und die durch (38) bestimmte Kurve, die den magnetischen Äquator in R und R' schneidet (Abb. 9c, 10c, 11c). Diese Punkte sind daher Knoten für die Isoporen $\dot{H} = \dot{H}_o$. Die Tangente des Knotenwinkels $\tan\beta$ ist der Grenzwert des Bruches $\frac{z}{x}$ an der Stelle $\chi = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 0$. Gemäß (25) ist

$$\tan\beta = -\frac{\cos\chi}{\sin\chi\cos\lambda}\,. \quad (39)$$

Berechnet man aus (38) $\cos\lambda$, setzt in (39) ein und berechnet den Grenzwert, so folgt:

$$\tan\beta = \frac{2\cdot H_o\omega}{\dot{H}_o}. \quad (40)$$

Die Gleichung der Nullisopore ist nach (33)

$$\cos\lambda = \frac{\dot{H}_o}{H_o\omega}\tan\chi. \quad (41)$$

Diese stellt eine geschlossene Kurve dar, die die magnetischen Pole tangential zu $\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ verläßt und bei Abnahme (Zunahme) von $\dot{M}$ das Gebiet der positiven (negativen) Isoporen-

werte umschließt. Bei Abnahme des magnetischen Momentes ziehen die magnetischen Pole diese Fläche hinter sich her (Abb. 9, 10, 11). Die von einer Nullisopore eingeschlossene Fläche ist gleich dem Integral:

$$F_o = 2 \cdot r^2 \int_{\lambda=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\chi=0} \sin\chi \, d\chi \, d\lambda = r^2 \pi - 2 \cdot r^2 \int_{\lambda=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\chi \, d\lambda \tag{42}$$

Gemäß (41) ist

$$\cos\chi = \sqrt{\frac{1-k^2}{1-k^2 \cdot \sin^2\lambda}}, \tag{43}$$

wobei für

$$\frac{1}{1+\left(\frac{\dot{H}_o}{H_o\,\omega}\right)^2} = k^2 \tag{43a}$$

gesetzt wurde.
Daraus folgt:

$$F_o = r^2 \cdot \pi - 2 \cdot r^2 \sqrt{1-k^2} \int_{\lambda=0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\lambda}}. \tag{44}$$

Unter dem Integralzeichen steht ein vollständiges elliptisches Integral I. Gattung, so daß man (44) auch schreiben kann:

$$F_o = r^2 \left[\pi - 2 \cdot \sqrt{1-k^2} \cdot K(k)\right]. \tag{45}$$

Wenn $\dot{H}_o = 0$, ist F_o gleich der Viertelkugelfläche $r^2 \cdot \pi$. Mit wachsendem $\dot{H}_o \neq 0$ wird die Fläche rasch kleiner und wenn der Bruch $\frac{\dot{H}_o}{H_o\,\omega}$ über alle Grenzen geht, nähert sich F_o asymptotisch $\to 0$.

a) $|\dot{H}_o| < |H_o\,\omega|$. Die von der Nullisopore umschlossene Fläche F_o liegt zwischen $r^2 \cdot \pi$ und etwa $\frac{r^2\pi}{6}$; die Tangente des Knotenwinkels $|\tan\beta|$ ist größer als 2 (Abb. 9c) und die Knotenlinie erreicht die magnetischen Pole. Die Spitzenisopore $H_o\,\omega$ umschließt den Fokus, dessen Extremwert zwischen $H_o\,\omega$ und $\sqrt{2} \cdot H_o\,\omega$ liegt.

Abb. 9 zeigt den Isoporenverlauf für $\dot{H}_o = -\frac{H_o\,\omega}{2}$, mit abnehmendem M.

b) $|\dot{H}_o| = |H_o\,\omega|$ (Abb. 10). Die von der Nullisopore umschlossene Fläche ist etwa $\frac{1}{6}$ der Viertelkugelfläche; $|\tan\beta| = 2$ (Abb. 10c), und die Knotenisopore $H_o\omega$ ist gleichzeitig Spitzenisopore. Der Fokus erreicht seine größte Flächenausdehnung und sein Wert ist $\sqrt{2} \cdot \dot{H}_o$.

c) $|\dot{H}_o| > |H_o\omega|$. F_o liegt zwischen $\frac{r^2\pi}{6}$ und $F_o > 0$. Die Spitzenisopore $H_o\omega$ umschließt nun nicht mehr den Fokus, sondern F_o; $|\tan\beta| < 2$, und die Knotenisopore hat sich vom magnetischen Pol losgelöst. Der Wert des Fokus liegt zwischen $\sqrt{2} \cdot \dot{H}_o$ und $\dot{H}_o$.

Abb. 11 zeigt den Isoporenverlauf für $\dot{H}_o = 2 \cdot H_o \omega$.

Wenn man das Verhältnis von $\frac{\dot{H}_o}{H_o \omega}$ von 0 bis ∞ stetig ändert, so findet ein stetiger Übergang von 3. nach 2. statt. Die Abb. 9, 10, 11 sind für abnehmendes magnetisches Moment M gezeichnet.

Literatur.

1. CHAPMAN, S.: Notes on Isomagnetic Charts III. The Isogonic and X-Y-Charts for the Centered Dipole Field. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, **46**, 7—14 (1941).

2. — Notes on Isomagnetic Charts VII. Mathematical Notes on Isoporic Charts and their Singular Points. Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity, **47**, 115—138 (1942).

Buchbesprechungen.

L'Institut Royal Météorologique de Belgique. 215 S. 1954.

Aus Anlaß des Abschlusses großer baulicher Erweiterungen hat das belgische meteorologische Landesinstitut in Uccle bei Brüssel eine prächtig ausgestattete und reich illustrierte Beschreibung seiner verschiedenen Abteilungen veröffentlicht. Der Leser wird der Reihe nach durch die einzelnen Dienstabteilungen geführt und lernt so die Bedürfnisse und Möglichkeiten der verschiedenen Arbeitsgebiete der Meteorologie und Geophysik kennen. So werden die Instrumente der allgemeinen Meteorologie, die Probleme der Klima- und Stationsnetzabteilung sowie der Bioklimatologie, die Methoden der Aerologie und die Anschauungen des Prognosendienstes erörtert. Die Beschreibung der Strahlungsabteilung läßt erkennen, wie eingehend auch die Strahlungsprobleme in Uccle gepflegt werden. Den Schluß bildet eine Schilderung des fern von elektrischen Störungsquellen an der Südgrenze des Landes gelegenen geophysikalischen Forschungsinstitut von Dourbes, das vor allem erdmagnetischen und luftelektrischen Untersuchungen gewidmet ist.

Diese belgische Institutsbeschreibung wird zweifellos einen großen Interessentenkreis finden. Durch die reichhaltigen Illustrationen wird sie dem Fachmann manche Anregung bieten, durch die breite Schilderung der Aufgaben der Forschung und ihrer praktischen Anwendungen wird sie aber auch einen weiteren Zweck erfüllen, das Interesse bei den Nichtfachleuten und vor allem bei den Behörden zu beleben.

W. Mörikofer, Davos.

Wetterkunde – Wetterforschung. Geschichte ihrer Probleme und Erkenntnisse in Dokumenten aus drei Jahrtausenden. Von K. Schneider-Carius. (Sammlung Orbis Academicus.) Mit 3 Textabb., 16 Tafelbeilagen, 2 Karten, 4 Schemazeichnungen, 423 S. Freiburg/München: K. Alber. 1955. Geb. DM 27.50.

Es ist kein Wunder, daß die Erforschung der Witterungserscheinungen ihren Ausgang von Mitteleuropa genommen hat. In der altägyptischen Kultur finden sich keine Ansätze zu einer Meteorologie, da es im dortigen Wüstenklima fast nur einen Wettertyp gibt. Von den alten Griechen stammt zwar das Wort „Klima", den Begriff „Wetter" kannten sie jedoch nicht, und mit „Meteora" bezeichnete Aristoteles alle Dinge, die oberhalb der Erdoberfläche, innerhalb oder außerhalb der Atmosphäre beobachtet werden können. In Mitteleuropa dagegen, dessen Klima vor allem durch die häufigen und vielgestaltigen Witterungswechsel gekennzeichnet ist, mußten die Probleme

der Witterungsvorgänge seit jeher stärker in das Bewußtsein der Menschen treten, und so ist es durchaus verständlich, daß hier seit undenklichen Zeiten die witterungsbedingten Geschehnisse die Dichter, Denker und Naturforscher interessiert haben. War die Beschäftigung mit diesen Fragen zunächst mehr eine Angelegenheit des Glaubens und der religiösen Anschauung, so gelangte sie immer mehr in den Bereich, wo der Drang nach Wissen und Verstehen maßgebend ist. So treffen wir schon früh auf die Beschäftigung der Naturforscher mit den Fragen des atmosphärischen Geschehens und lange Zeit ging es um das objektive Verstehen der Vorgänge und ihrer Ursachen, nicht etwa wie heute, wo sich weite Kreise angewöhnt haben, es als die wichtigste Aufgabe der Meteorologie anzusehen, das Wetter von morgen oder die Witterung des nächsten Monats vorauszusagen.

So datiert das Interesse für die Erforschung der meteorologischen Erscheinungen etwa seit der Zeit der Renaissance, und wenn auch dieses Fachgebiet bis ins 19. Jahrhundert kaum als selbständige Wissenschaft, sondern mehr als Anwendungsgebiet der verschiedenen Bereiche der Physik gewertet wurde, so besitzt doch die meteorologische Forschung eine manche Jahrhunderte umspannende Entwicklung. Eine „Geschichte der Meteorologie" hat es jedoch bis jetzt noch nicht gegeben, wenngleich zahlreiche Forscher sich mit Erfolg bemüht haben, die Entwicklungsgeschichte einzelner Anschauungen oder Methoden durch kritische Untersuchungen abzuklären. Als produktivster unter diesen Meteorologiehistorikern ist wohl G. Hellmann anzusprechen, der es verstanden hat, Licht über die frühesten meteorologischen Beobachtungsreihen, über die Bemühungen früherer Jahrhunderte um die Gewinnung einer Wettervorhersage oder über das Geheimnis des hundertjährigen Kalenders auszubreiten, das so sehr von Irrglauben und Mißverständnissen genährt war.

Angesichts dieses Fehlens einer zusammenfassenden Darstellung der historischen Entwicklung der Meteorologie wird die Fachwelt K. Schneider-Carius Dank dafür wissen, daß er aus der „Grundschicht" der Gegenwartsprobleme aufgetaucht ist und es unternommen hat, in einem gewichtigen und gehaltvollen Buche diese Lücke auszufüllen. Zwar will auch diese Darstellung nicht eine eigentliche „Geschichte der Meteorologie" sein. Im Rahmen der umfassenden Sammlung „Orbis Academicus", die es sich zur Aufgabe gemacht hat, die Problemgeschichte der einzelnen wissenschaftlichen Forschungsgebiete in Dokumenten darzustellen, läßt sie vielmehr die Forscher der einzelnen Jahrhunderte durch wörtliche Wiedergabe wichtiger Abschnitte aus ihren Veröffentlichungen selbst zu Worte kommen; doch tritt der Verfasser Schneider-Carius durch geschickte Auswahl der Zitate, sowie durch verbindenden Text und Hinweise auf die Problemgestaltung immer wieder in Erscheinung.

In fünf, in sich nach Problemkreisen gegliederten Kapiteln wird dem Leser die historische Entwicklung der Anschauungen vom atmosphärischen Geschehen vorgeführt. Im ersten Kapitel über die vorwissenschaftliche Zeit wird gezeigt, wie zur Zeit der Antike und des Mittelalters die Wahrnehmung der Witterungserscheinungen im Vordergrunde stand, wobei Dichtung und Religion als Hauptquellen zu dienen haben. Mit der Renaissance setzt die Begründung der Wissenschaft vom Wetter ein und es wird versucht, die Elemente des Wetters zahlenmäßig zu erfassen und die physikalischen Eigenschaften der Atmosphäre zu verstehen. Mit dem Anfang des 19. Jahrhunderts beginnt das dritte Kapitel, an seinem Anfang stehen die Bemühungen um eine Klassifikation der Wolkenformen, daran schließen sich die Darstellung

des Wetters durch Klimakarten und Wetterkarten und die Erkenntnisse über das Gesetz der Stürme an; hier begegnen wir Namen wie Humboldt, Dove und Espy, aber auch Köppen, Bezold und Hann tauchen schon auf.

Das vierte, mit 90 Seiten umfangreichste Kapitel schildert eingehend, wie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die dynamische Meteorologie entstanden ist, wie sich die Anschauungen über die allgemeine Zirkulation entwickelt und wie sich die Grundvorstellungen der Thermodynamik der Atmosphäre und der Physik der Wolken und Niederschläge durchgesetzt haben; die Einteilung der Klimate durch Köppen und die Anfänge der luftelektrischen Forschung durch Elster und Geitel vervollständigen den Stoff dieses Kapitels.

Das letzte Kapitel behandelt die Meteorologie in der Gegenwart und zeigt, wie heute die Erforschung der Energetik des Wetters und die Schichtung der Lufthülle in Grundschicht und freie Atmosphäre im Vordergrund des Interesses steht. Eine entscheidende Bereicherung hat auch die Auffassung der Atmosphäre als kolloidales Aerosol sowie die Betonung einer stärker biologischen Denkweise in der Klimatologie zur Folge gehabt. So führt Schneider-Carius' historischer Überblick bis zu den heute noch im Schmelztiegel der Forschung kochenden Problemen des Strahlstroms, der allgemeinen Zirkulation oder der numerischen Vorausberechnung des Wetters. Wertvoll ist auch der Anhang mit einem Quellennachweis für die abgedruckten Originalberichte, einem biographischen Register der wichtigeren Forscher der Vergangenheit, sowie mit einer umfassenden Bibliographie, die wohl den größten Teil aller für den Fortschritt in der Meteorologie entscheidend gewordenen Schriften einschließlich der monographischen Darstellungen umfaßt, und dadurch eine reiche Fundgrube wertvoller Hinweise bietet.

„Wozu soll nun aber eine solche historische Darstellung gut sein, wo doch alle wichtigeren Erkenntnisse über Aufbau und Energetik der Atmosphäre, oder über das stratosphärische Ozon und über den kolloidalen Zustand der Atmosphäre erst den letzten paar Jahrzehnten zu verdanken und daher ältere Darstellungen längst überholt sind?", so mag wohl mancher Meteorologe unserer Tage fragen. Ganz bestimmt wird man nicht zu älteren Autoren greifen, wenn es darum geht, möglichst reichhaltige objektive Kenntnisse vermittelt zu erhalten. Und doch verschafft erst ein Einblick in das Werden unserer Anschauungen das volle Verstehen der geistigen Zusammenhänge und dadurch einen Überblick über die Geistesgeschichte unserer Wissenschaft, der einem Ausblick von hohem Berggipfel zu vergleichen ist. Und wenn wir bedenken, daß für frühere Zeiten etwa die Erkenntnis von den Regeln der Temperaturabnahme mit der Höhe oder von den Zusammenhängen zwischen den aerodynamischen Vorgängen und dem Wettergeschehen eine gleich bedeutende Leistung, aber auch eine gleich große Sensation bedeutet haben muß wie für unsere Tage etwa die Entdeckung des Jetstreams oder die Möglichkeit der Beeinflussung der Niederschlagsbereitschaft, so wächst unsere Achtung vor unsern geistigen Vorfahren. Und die damit verbundene Bescheidenheit verschafft oft erst die Blickweite, um die eigenen Bemühungen in den richtigen Rahmen zu stellen und ihnen dadurch erst recht das ihnen zukommende Gewicht zu verleihen. So kann auch dem jungen Meteorologen die Beschäftigung mit dem Werden seiner Wissenschaft nicht genug empfohlen werden, wenn sich auch das volle Verständnis für die historischen Zusammenhänge im allgemeinen erst dem reiferen Alter erschließt.

W. Mörikofer, Davos.

Wladimir Köppen. Ein Gelehrtenleben für die Meteorologie. Von Else Wegener-Köppen. (Große Naturforscher: Band 18.) Mit 13 Textabb., 195 S. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft m. b. H. 1955. DM 12.50.

Im allgemeinen wird heute leider viel zu wenig Wert darauf gelegt, neben der Arbeit an der Weiterentwicklung an einer der naturwissenschaftlichen Disziplinen auch ihre geschichtliche Entwicklung gebührend zu beachten und zu würdigen. In dieser Beziehung sind die geisteswissenschaftlichen Disziplinen den naturwissenschaftlichen weit voraus. Es besteht dort kein Zweifel, daß die Geschichte des betreffenden Zweiges der Geisteswissenschaften auch zur Wissenschaft selbst gehört und ihrer Entwicklung wertvolle Aspekte geliefert hat und immer wieder liefert. Auf dem Gebiete der Meteorologie hat es wohl auch schon wertvolle Ansätze zum Aufbau ihrer Geschichte gegeben. Es sei in dieser Beziehung an die Arbeiten von Hellmann und aus jüngster Zeit an das schöne Buch von Schneider-Carius „Wetterkunde – Wetterforschung" erinnert. Auch aus Diskussionen im Rahmen der Meteorologischen Weltorganisation aus der allerneuesten Zeit wird klar, daß die Bedeutung und Notwendigkeit der Bearbeitung einer Geschichte der Meteorologie immer mehr erkannt wird. Normalerweise wird die Geschichte einer wissenschaftlichen Disziplin entweder die Darstellung ihrer historischen Entwicklung insgesamt anstreben oder eine Entwicklungsgeschichte der wesentlichen Grundgedanken des Aufbaus ihrer Grundlagen im Laufe der Zeit bringen können. Neben derartigen allgemeinen und systematischen Geschichtswerken werden aber auch Monographien und Lebensgeschichten einzelner führender Köpfe der betreffenden wissenschaftlichen Disziplinen immer wieder von nicht zu unterschätzendem wissenschaftsgeschichtlichem Wert bleiben, weil darin das Miterleben der Entwicklung durch einen führenden Geist dieses Zweiges der Wissenschaft erlebnismäßig besonders einprägsam und eindrucksvoll zum Ausdruck kommen kann.

Dies ist besonders auch in dem vorliegenden Werk der Fall, das zum Großteil sogar in Form eines Tagebuches eines über sieben Jahrzehnte lang durch seine Arbeit an der Entwicklung seiner Wissenschaft maßgebend beteiligten Meteorologen diese Entwicklung miterleben läßt. Es ist dabei lehrreich und interessant zugleich, nicht nur zu erfahren, wie in früheren Zeiten das Hineinwachsen in die Meteorologie als Beruf und Lebensstellung einerseits und als Lebensinhalt andererseits mehr, als dies heute im allgemeinen der Fall ist, auf der freien Entwicklung persönlicher Initiative basierte, sondern auch zu sehen, wie heute allgemein anerkannte und sozusagen für ganz selbstverständlich gehaltene Grundgedanken und Gesetze einmal Probleme waren, die oft erst in nicht leichtem Kampfe zur Anerkennung gebracht werden mußten. Das macht auch das Buch über Köppen zur wertvollen und genußreichen Lektüre, die daneben auch für den heutigen Meteorologen sehr lehrreich ist, dies besonders auch, weil hier nicht nur Geschichte der meteorologischen Wissenschaft, sondern auch Geschichte der Entwicklung ihrer praktischen Anwendung geboten wird. Daneben ist es auch nicht uninteressant, Einblick in die persönlichen Lebensverhältnisse eines der führenden Meteorologen der früheren Zeit zu gewinnen.

Das Buch gliedert sich in zwei Abschnitte. Der erste, die Zeit von 1846 bis 1903 umfassende Teil, bringt zum Großteil die von Köppen selbst niedergeschriebenen Lebenserinnerungen, während die Darstellung der weiteren Lebensabschnitte des Gelehrten im zweiten Teil von seiner Tochter stammt, die dabei von E. Kuhlbrodt unterstützt wurde. Von den großen Werken

Köppens, deren Werden wir in dem Buch miterleben können, sei insbesondere seine Arbeit am Aufbau des synoptischen Dienstes in Deutschland, der Drachentechnik und Aerologie und seiner Klassifikation der Klimate hervorgehoben. Im Anhang ist dem Buch eine vollständige Liste der 526 wissenschaftlichen Arbeiten Köppens beigegeben.

F. Steinhauser, Wien.

Dynamik der Zyklonen. Von P. Raethjen. Mit 292 Textabb., XII, 384 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1953. DM 35.—.

„Die Frontalzyklonen gemäßigter Breiten können weder, wie die Alten glaubten, als wirbelnde Massen, noch, wie man in neuerer Zeit annahm, als wirbelnde Wellen richtig verstanden werden. Denn einerseits hat die Zyklone einen für ihre Existenz wesentlichen Stoffwechsel: Fortwährend nimmt sie neue Luftmassen auf, indem sie diese verwirbelt, und scheidet andere aus, indem sie diese entwirbelt. Andererseits besitzt sie keine sich fortpflanzenden periodischen Änderungen wie eine Welle, sondern hat eine typische Lebensgeschichte mit charakteristischen Entstehungs-, Entwicklungs- und Alterungsphasen. Sie pflanzt sich fort, nicht durch Ausbreitung in den Raum wie eine Welle, sondern wie ein lebendes Wesen durch die Geburt einer jungen ‚Frontalzyklone' aus dem Mutterschoß (Frontalzone) einer erwachsenen „Zentralzyklone". Trotz dieser biologisch anmutenden Erscheinungsform handelt es sich aber um Strömungsvorgänge der atmosphärischen Luft, welche bei all ihren Komplikationen den Gesetzen der Dynamik gehorchen. Das zu zeigen, ist die Aufgabe des vorliegenden Buches; darzulegen, wie auf der rotierenden Erde durch Bestrahlung und Reibung, Schwerkraft und Massenträgheit diese Erscheinungsformen entstehen."

Dieser im Vorwort vom Verfasser gegebenen Einstellung und Aufgabenstellung entsprechend will er unter Nutzung der in den letzten 15 Jahren erfolgten entscheidenden Erweiterung unserer Beobachtungen sich nicht damit begnügen, die theoretischen Widersprüche der verschiedenen früheren Zyklonentheorien zu verleimen, sondern eine neue dynamische Schau mit Hilfe von einfachen Modellen unter Verwertung fruchtbarer Ideen aus früheren Theorien geben. Er wollte damit eine Gesamtschau der Zyklonendynamik bringen, die, in Einzelheiten vielleicht noch korrekturbedürftig, den Versuch einer für den Fortschritt der Erkenntnis sehr notwendigen Systematik liefern sollte.

In der Darstellung wird ein origineller Weg beschritten, indem die Behandlung in zwei Teilen erfolgt: In einem ersten nichtmathematischen Teil, in dem zwar ohne mathematische Beweise und Ableitungen, aber auf diesen fußend in einer vergleichenden und historischen Betrachtung eine Gesamtschau gegeben wird, und in einem zweiten mathematischen Teil, in dem die mathematische Begründung und die mathematische Behandlung einzelner Modelle überwiegt.

In der vom Verfasser auch schon aus seinen früheren Werken bereits bekannten didaktisch meisterhaften Art setzt er sich in den einleitenden Abschnitten zunächst kritisch mit den verschiedenen bisherigen Zyklonentheorien, ihren Grundgedanken und ihren Folgerungen sowie mit den Störungstheorien der letzten Dezennien auseinander, leitet aus den neueren Ergebnissen aerologischer Beobachtungen Folgerungen über Form und Entstehung der Temperatur und Strömungsfelder der Frontalzonen sowie

über den Mechanismus der Störungsfelder ab und erläutert das Wesen der Aktionszentren und die für ihre Erhaltung wesentliche Funktion ihrer Randstörungen.

Als typische Störung der planetarischen Polarfront wird das Viererdruckfeld in seiner Bedeutung für die Entstehung der Frontalzyklonen und in seiner Erhaltung aus dem durch die Pumpwirkung dieser Frontalzyklonen bewirkten Stoffwechsel gezeigt. Nach einer kritischen Vergleichung der verschiedenen Theorien des planetarischen Zirkulationssystems wird eine Existenz des planetarischen Dreizonendruckfeldes und seine Modifikation durch die Überlagerung des Effekts der Rauhigkeitsunterschiede zwischen Nord- und Südhalbkugel und der Monsuneffekte der Kontinente und Ozeane nachgewiesen. Für den Wärmetransport und für den Nachschub der Westwindimpulse sind in den gemäßigten Breiten die nichtpermanenten Meridionalzirkulationen mit ihrem Gleitaustausch allein maßgebend, während der Passatzirkulation wohl nicht für den Wärmetransport, aber für die Polwärtsverfrachtung von Rotationsmomenten auch bis in den Jetstream hinein eine erhebliche Bedeutung zugeschrieben wird. Eine Bedeutung für die planetarische Zirkulation wird auch einer sogenannten permanenten „Tropopausenzirkulation" zugebilligt, die die in den Tropen in der Stratosphäre auftretenden troposphärischen Luftmassen durch Abgleiten über der Tropopause polwärts führt, dort diese wieder in die troposphärische Meridionalzirkulation einbezieht und damit auch die untere Stratosphäre am Transport von Rotationsmomenten beteiligt. In einem schematischen Meridionalschnitt wird gezeigt, daß im planetarischen Zirkulationssystem das Dreizonensystem sich auch auf die freie Tropopause erstreckt, wobei in der Konvektionszone zwischen Äquator und 40° Breite sich die Konvektion bis in die oberste Troposphäre erstreckt, in den gemäßigten Breiten zwischen 40 und 70° Breite Auf- und Abgleiten mit meridionalen Vorzugsachsen vorherrschen bei Beschränkung der vertikalen Konvektion im allgemeinen auf die unteren 4 km und im polaren Gebiet die Polarzyklone quasistarr um ihre Achse rotiert. In 55—70° erscheint nach diesem Schema die Polarfront als Zone zyklonaler Westwindscherung zyklonenbildend, wobei auch die darin gelegene polare Begrenzung der durch den Meridionalaustausch polwärts gerichteten Beförderung der Rotationsmomente anderer Breiten und die damit verbundene Anhäufung von Westwindimpulsen mitwirken soll, indem dadurch die Polarfront besonders störungsempfindlich wird. Es werden fünf Typen von Störungen von Polar- und Äquatorialfront entwickelt und durch Wetterkarten-Beispiele illustriert.

Für die Wirbelentstehung oder -änderung werden folgende Möglichkeiten in Betracht gezogen: Erhaltung des absoluten Wirbels in meridional bewegten Massen, Horizontaldivergenz bzw. -konvergenz, Horizontal- und Gleitaustausch, Solenoide und vertikale Achsenschwenkung eines Wirbels mit anfänglich horizontaler Achse. Diese Möglichkeiten werden auch auf die Entstehung fronthaft scherender Stromfelder angewendet. In die Probleme, die mit der Zyklogenese zusammenhängen, führen weiter ein die Ausführungen über die Entstehung thermischer und dynamischer Druckfelder und Kompensation und über plötzliche Zyklogenese durch Störung einer Instabilität eines anfänglichen Feldes oder durch Begegnung verschiedener zyklogenetischer Elemente. Als zyklogenetische Modelle werden beschrieben das Austropfen von Höhenzyklonen aus der polaren Stratosphäre, Konvektionszyklonen (Wärmegewitter, tropische Taifune, Monsunzyklonen), die Frontalzyklogenesis (Wirbelbildung durch obere Initialzyklonen oder im Delta der Frontalzone), Zentralzyklogenesis durch Alterung einer Frontalzyklone (auf der

Polseite des planetarischen Westwindringes) und durch Cutoff (auf der Äquatorseite der Polarfront) und als genetische Ergänzungsmodelle das aus der Pumpwirkung der Frontalzyklone als haltbar erklärte Viererdruckfeld, das orographische Modell mit Ablenkung des Westwindstromes äquatorwärts über den Kontinenten und polwärts über den Meeren und die stationäre Mäanderung des Westwindstromes mit Erhaltung des Absolutwirbels, die Existenz, Ursache und Wirkungsweise des Gleitaustausches, Fronten und Okklusionen.

Der mathematische Teil gliedert sich in folgende Abschnitte: Die Vorticity und ihre individuelle Veränderlichkeit; Vorticity, Horizontaldivergenz und Vertikalbewegung; Statik und Kinematik der Druckfeldänderungen; Adaptation und Kompensation; zweidimensionaler Impulsaustausch; Randeffekte der planetarischen Polarzyklone; Konvektion und Konvektionszyklone.

Im Nachwort legt der Verfasser Wert darauf, zu betonen, daß in seinem Buch die zur Behandlung gelangten „Modelle" nicht aus der mathematischen Vereinfachung, sondern aus den synoptischen Beobachtungen entsprungen sind und daß aus der Fülle synoptischer Beobachtungen solche Spezialfälle herausgegriffen wurden, die einfache dynamische Zusammenhänge aufzeigen.

Das Buch enthält in verschiedener Hinsicht sehr viel Originelles in den Gedankengängen und in den Ableitungen. Es setzt deshalb auch erfahrene und kritische Leser voraus und für solche wird es sehr anregend wirken. Dagegen erscheint es mir als Lehrbuch für Studierende eine etwas schwierige Lektüre zu sein, und zwar nicht wegen der Kompliziertheit der mathematischen Behandlung, sondern vielmehr gerade wegen der originellen Gedankengänge, die manchmal ungewohnte neue Wege beschreiten und in mancher Hinsicht auch noch eines weiteren kritischen Durchdenkens und einer Klärung umstrittener Ansichten bedürfen. Darin liegt aber gerade das Interessante an dem Buch und sein Wert, daß hier einmal von einem originellen forschenden Geist das ganze komplizierte Problem der atmosphärischen Zyklonen in entsprechender Ausführlichkeit behandelt wurde, verschiedene Ansichten und Theorien gegeneinander kritisch abgewogen und neue Ansichten zur Diskussion gestellt worden sind. Deshalb ist eine eingehende Beschäftigung und Auseinandersetzung mit diesem Buch jedem Meteorologen zu empfehlen.

F. Steinhauser, Wien.

Rocket Exploration of the Upper Atmosphere. Von R. L. F. Boyd und M. J. Seaton. (Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics: Special Supplement: Vol. I.) Mit 228 Textabb., VIII, 376 S. London: Pergamon Press Ltd. 1954. £ 3/15/0.

Die im Krieg entwickelte und in der Nachkriegszeit zum wissenschaftlichen Forschungsinstrument ausgebaute Raketentechnik hat es ermöglicht, Gebiete der freien Atmosphäre der direkten Beobachtung zu erschließen, die früher nur indirekten Forschungsmethoden zugänglich waren. Allerdings sind in der direkten Beobachtung nicht nur durch die Notwendigkeit des Transportes der Beobachtungsinstrumente in die höchsten Atmosphärenschichten Schwierigkeiten entstanden, sondern es wurde wegen der starken Verdünnung der Luft in diesen Schichten auch notwendig, ganz neue Beobachtungsverfahren zu ersinnen. Von den zu beobachtenden meteorologischen Größen sind viele nicht unmittelbar an Beobachtungsinstrumenten abzulesen, wie dies in der bodennahen Luftschicht der Fall ist, sondern sie machen auch in der experimentellen Beobachtung Deduktionen und indirekte Wege

notwendig, die zum Teil auch eine nicht immer eindeutige Deutung und Auslegung von Beobachtungswerten erfordern können. Diese Art von Forschung hat, wie bekannt, wesentlich neue Erkenntnisse gebracht, aber auch neue Probleme aufgeworfen, deren Diskussion auf Expertenkonferenzen nicht nur einen Überblick über den neuesten Stand der Forschung und Forschungstechnik bringen, sondern auch zur Klärung von Schwierigkeiten der Forschungsmethoden, wie auch von Unklarheiten der Ergebnisse beitragen kann.

Das vorliegende Buch bringt einen Bericht über eine derartige Expertentagung, die vom 24. bis 26. August 1953 in Oxford abgehalten worden ist. Ein solcher Tagungsbericht hat zwar den Nachteil, daß die Geschlossenheit der Darstellung durch die Auflösung in Einzelbeiträge leidet, bringt aber andererseits den nicht zu unterschätzenden Vorteil, daß die einzelnen Redner als Spezialisten eines bestimmten Teilgebietes der Forschung die Probleme und Schwierigkeiten ihres eigenen Arbeitsgebietes unmittelbar am besten kennen und daher Teilprobleme meist eingehender behandeln können, als dies in einer geschlossenen Darstellung eines gesamten Forschungsgebietes möglich ist.

Auf der erwähnten Tagung kamen Probleme der Raketen- und Beobachtungstechnik, Ergebnisse der Beobachtungen von Druck, Temperatur, Wind, Zusammensetzung der hohen Atmosphärenschichten, Ionosphäre, Sonnenstrahlung, erdmagnetische Variation und kosmische Strahlung, Laboratoriumsuntersuchungen und auch Ergebnisse theoretischer Überlegungen zur Sprache.

Nach einer Übersicht über die Entwicklung der Raketentechnik und der Meßmethoden für die verschiedenen meteorologischen Elemente und über die bisherigen Raketenaufstiege werden im besonderen Beobachtungsmethoden und Ergebnisse der photometrischen Luftlichtbestimmung, der Temperaturbeobachtung, der akustischen Meteoritenbeobachtungen und die Methoden der Vermessung der Raketenbahnen dargestellt. Aus den einzelnen Beiträgen, die die Beobachtungsergebnisse behandeln, gewinnt man einen guten Einblick in die verschiedenen Methoden zur Bestimmung der Dichte, des Drucks, der Temperatur und der Luftströmungen und zugleich auch die Möglichkeit zum Vergleich der mit verschiedenartigen Methoden gewonnenen Meßergebnisse. Von neueren Beobachtungsmethoden seien erwähnt: die Dichte- und Temperaturberechnung aus der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsbeobachtung fallender Kugeln, Druck-, Höhen- und Windbestimmungen aus Radio-Echomessungen von Meteorhöhen und -bahnen, Bestimmung der Höhenabhängigkeit der Windgeschwindigkeit durch photographische Aufnahmen der Meteorbahnen in großen Höhen, Beobachtungen von wandernden Störungen der F 2-Region und Temperaturmessungen in 30 bis 80 km Höhe aus Beobachtungen der Schallgeschwindigkeit von Explosionen von aus Raketen abgeworfenen Granaten. Ferner wurde über die Technik der Sammlung von Luftproben aus der hohen Atmosphäre und über ihre chemische Analyse berichtet, wobei darauf hingewiesen wird, daß die gefundenen Andeutungen einer Entmischung der Luft oberhalb 65 km Höhe noch nicht als gesichert angesehen werden können. Andererseits ist auch die mit Massenspektrometern gemachte Feststellung, daß das Verhältnis von Argon zum molekularen Stickstoff sich in 97 bis 135 km Höhe nicht im Sinne einer Entmischung der Luft mit der Höhe ändert, noch mit gewissen Unsicherheiten behaftet. Dagegen lieferten spektroskopische Aufnahmen eindeutige Resultate über die Höhenverteilung des Ozons bis 70 km Höhe, die mit den Folgerungen aus der photochemischen Theorie gut überein-

stimmten. Zur Untersuchung der Verhältnisse in der Ionosphäre wurde durch Beobachtung der Ausbreitung zweier von Raketen ausgesandter Frequenzen die Verteilung der Elektronendichte, der Ionendichte und der Elektronenkollisions-Frequenzen in Verbindung mit der Messung des erdmagnetischen Feldes bestimmt. Die aus der Messung der Retardationszeiten zweier vom Boden ausgesandter und von den Raketen aufgenommener Radiosignale verschiedener Frequenzen abgeleitete Höhenabhängigkeit der Elektronendichte zeigt eine doppelte Schichtung der E-Region. Ferner werden auch Technik und Ergebnisse von Ionosphärenuntersuchungen mit der Langmuir-Sondenmethode und mit niedrigen Radiofrequenzen, von Messungen des Elektronenstroms in 93 bis 105 km Höhe über dem magnetischen Äquator, von Beobachtungen solarer X-Strahlen über der E-Schicht, von Bestimmungen des UV-Spektrums der Sonnenstrahlung in großen Höhen mit Photonenzählern und mit UV-Spektrographen und Messungen der Intensität und der Zusammensetzung der kosmischen Höhenstrahlung mitgeteilt. Die Ergebnisse der Laboratoriumsuntersuchungen betreffen die Strahlungsabsorption im UV und im Bereich der Wellenlänge 1215.7 A, die verschiedene Wirkungsweise der Ionen- und Elektronensonden in Laboratorien und bei Raketenaufstiegen und Untersuchungen langsamer Elektronenkollisionen mit Mikrowellen.

Während bis vor kurzem eine im allgemeinen gute Übereinstimmung zwischen den aus den Raketenaufstiegen abgeleiteten Ergebnissen über die Zustände der hohen Atmosphäre und den früher mit indirekten Methoden erschlossenen Ergebnissen angenommen werden konnte, haben die neueren mehr ins Detail gehenden und auch in größere Höhen reichenden Beobachtungen mit Raketen auch einige abweichende Ergebnisse gebracht. So wird z. B. vom theoretischen Standpunkt aus die große Ionenkonzentration in den D- und E-Schichten für zu hoch angesehen und die Temperaturen und die Teilchenkonzentrationen in Höhen über 100 km erscheinen als zu niedrig. Vom theoretischen Gesichtspunkt wird auch die Dissoziation von Sauerstoff in der hohen Atmosphäre und die Diffusion von Stickstoffatomen und Sauerstoffmolekülen in der F-Schicht behandelt. Schließlich werden auch noch die Möglichkeiten von Beobachtungen auf künstlichen Erd-Satelliten und der Verwendung von Raketen für astronomische Beobachtungen erörtert.

F. Steinhauser, Wien.

Final Report: Project Cirrus. Part I: Laboratory, Field, and Flight Experiments. Von V. J. Schaefer. 170 S. March 1953. — Part II: Analysis of the Effects of Periodic Seeding of the Atmosphere with Silver Iodide. Von I. Langmuir. 340 S. May 1953. Report No. RL-785. General Electric Research Laboratory, Schenectady, New York.

The new era in cloud physics.

'*Project Cirrus*' is the name of a series of researches into cloud and precipitation physics by staff of the General Electric Company, led by Dr. Irving Langmuir. This review of their work begins with remarks on the development of this subject.

The growth of cloud physics.

During about the decade before the last war the study of clouds emerged from the purely observational stage. Prominent among the leaders of thought were Köhler, Bergeron and Findeisen; their work brought a theme into the various studies, the theme of the *precipitation process.*

At the Lisbon Assembly of the U.G.G.I. in 1933 BERGERON discussed microphysical processes which cause the growth of cloud particles. He concluded that the only process important in the production of precipitation is rapid condensation upon relatively rare ice crystals formed in a cloud of supercooled droplets, perhaps helped by collisions with droplets when the crystals have become large enough to settle quickly through them. BERGERON presumed that "almost every real raindrop ($d > 0.5$ mm) and all snowflakes originated around an ice crystal". In the tropics rain had occasionally been seen beneath clouds wholly below the 0°C level; such rain he conceded must arise by a condensation coalescence process which he regarded as ordinarily inefficient and responsible only for drizzle. He emphasized a physical distinction between drizzle and rain or snow; using in synoptic meteorology a new physical classification of clouds, based on the nature of their particles, he showed that in extra-tropical weather showers, drizzle and ordinary rain or snow are characteristic respectively of the cold air masses, warm air masses and fronts.

Also at this time DOUGLAS and J. BJERKNES established the classification of clouds according to the kind of ascending motion within them. A coherent framework of dynamical and physical ideas was made from the formerly shapeless knowledge of clouds and precipitation.

FINDEISEN, in Germany, supported BERGERON'S views. Before and during the war he improved crystal-growth theory of precipitation release. An essential feature of the theory is that crystals should form inside clouds, at temperatures not far below 0°C, in rather small concentrations of order 1/litre. If there are many more, then each crystal, after taking its share of the condensed vapour, cannot attain the mass of a snowflake or raindrop; if their concentration is much smaller, then although the crystals can become large they can represent only an inappreciable precipitation. The problem arises of finding what controls the concentration of atmospheric ice crystals.

FINDEISEN supposed crystals form by condensation upon *sublimation nuclei*, minute solid particles of quartz or other minerals which have a crystal structure like that of ice. KRASTANOW, in Sofia, suggested that they form mainly by the freezing of droplets containing solid "*freezing nuclei*" of less special structure. In several German laboratories elaborate experiments were made, apparently quite independently, to find the nature and properties of crystal nuclei, presumably supported in the hope of finding applications to meteorological problems of aircraft operation: forecasting and preventing airframe and engine icing, radio noise and condensation trails, and forecasting clouds and airfield weather.

The atmospheric crystal nuclei were not identified. However, it was established that their concentrations are variable and in general small, and that occasionally supercooled clouds fail to precipitate because of a lack of nuclei. FINDEISEN sought efficient artificial nuclei with which to modify supercooled clouds and to stimulate or prevent precipitation. In 1938 he wrote: „Die Erkenntnis, daß ganz kleine, quantitativ unbedeutende Ursachen zur Auslösung bedeutsamer Witterungserscheinungen genügen, verschafft die Gewißheit, daß gelegentlich auch menschliche Mittel ausreichen, den Witterungsablauf künstlich zu lenken. Es würde über das Ziel der vorliegenden Arbeit hinausgehen, die Möglichkeiten der technischen Wetterbeeinflussung im einzelnen zu besprechen."

Surprisingly, FINDEISEN failed to discover highly efficient crystal-nucleating agents. In the years 1942—44 he several times used an aircraft to

seed dusts of siliceous earths into supercooled altocumulus and provoke the formation of snow-trails, thus making the first deliberate and successful attempts to exploit the crystal-growth process in natural clouds. All the German work came to an abrupt end; FINDEISEN himself disappeared during the liberation of Prague. His work had been distinguished by a realistic appreciation of the meteorological significance of experimental and observational studies.

The wartime development of cloud physics in Germany had no parallel on the Allied side, where meteorologists seemed comparatively indifferent to the exciting prospects which had been raised. However, at about the time when the invasion of Europe was bringing the German work to an end the pressure of operational problems led Allied *physicists* to enter the same field of studies. In England experiments on crystal formation in small expansion-chamber clouds were begun at Oxford, stimulated by problems in the design of a hygrometer needed for studies of condensation trails. In the U.S.A. LANGMUIR and his assistant VINCENT SCHAEFER began to study crystal formation in supercooled clouds after being impressed by the prevalence of riming at a mountain observatory, chosen for experimental studies in aircraft-radio interference caused by flight through snow.

The history of Project Cirrus.

LANGMUIR first directed studies on riming. In particular he developed formulae for the proportion of wind-borne droplets approaching a collector which strike it. These later proved valuable in calculating the growth of raindrops and hailstones.

At the end of 1945 more attention was given to supercooling phenomena, and the group was joined by a physical chemist, Dr. BERNARD VONNEGUT. Supercooled clouds were made in the laboratory by breathing into a large cold box, open at the top. At temperatures down to at least -20° C very few crystals would form, and these quickly grew and fell to the floor of the box, leaving a stable supercooled cloud. Various dusts seemed poor nucleating agents.

In July 1946 SCHAEFER accidentally made a discovery which probably had eluded other experimenters only because they studied clouds enclosed in chambers. To chill a supercooled cloud he placed in it a block of solid carbon dioxide, "dry ice", which has a surface temperature of about -78° C and is almost universally used in laboratories as a cooling agent. The supercooled cloud in the coldbox transformed into a multitude of small crystals. SCHAEFER found that astronomical numbers of crystals would form in the wake of a few chips of dry ice, or in the wake of any body with a surface temperature below -40° C. The crystals form in the suddenly chilled air by a spontaneous condensation, independently of foreign nuclei, in a manner which is still being investigated.

Within a few months VONNEGUT discovered, after trials with several substances selected for their crystal structure, that particles of silver iodide cause abundant crystal formation when introduced into supercooled clouds at temperatures below about -5° C. It was estimated that a few pounds of dry ice or silver iodide could theoretically provide sufficient crystals for the precipitation from an entire cloud system.

In November 1946 SCHAEFER scattered a few pounds of dry ice from a hired aircraft into a supercooled altocumulus and transformed it into snow trails. It is not difficult to imagine the excitement of these men when they

discovered such powerful nucleating agents, nor to understand their eagerness to use them for experiments in weather modification. It was decided that the work should continue under government sponsorship, and a contract was arranged with military authorities for "a research study of cloud particles and cloud modifications," with aircraft and aircrew of the U.S. Air Force. This work began in February 1947, and became known as *Project Cirrus;* it ended in September 1952.

Project Cirrus Laboratory Work.

The laboratory work of major importance was VONNEGUT'S invention of several techniques of making silver iodide nuclei, and SCHAEFER'S development of a continuous cloud chamber for nucleation studies.

VONNEGUT prepared nucleus generators of several kinds. The most efficient are those in which a solution in acetone of a double salt formed of silver iodide and sodium iodide is used. In one generator charcoal which has been dried after soaking with this solution is burned in a draught; in the other a spray of the solution is burnt in a hydrogen or propane flame. The smokes from such generators contain particles which are active as crystal nuclei in increasing numbers as the temperature falls from $-5°$ to about $-25°C$; the output of a generator costing about three dollars an hour to operate is about 10^{14} nuclei/sec, that is, sufficient to infect with nuclei in concentration significant for precipitation release a volume of the atmosphere of 10 km^3/sec. For the first time it became possible to make experiments in cloud modification *from the ground*, using the wind to diffuse nuclei from such generators. Even more efficient generators will be needed, for operating costs over a long period are substantial, and at present the silver iodide particles undergo a photolysis of the surface layers which in dry and sunlit air soon destroys their activity as ice nuclei. Preliminary studies during Project Cirrus and more recent work have shown the inactivation to be a complicated phenomenon which will not easily be controlled.

The continuous-diffusion cloud chamber is a simple device for producing a volume of supersaturated air with a strong vertical temperature gradient, which is useful for studying the nucleating action of various injected natural and artificial aerosols. In one spectacular experiment with this apparatus the spontaneous freezing of falling droplets is seen when they reach the level at which the temperature is a little above $-40°C$. As each droplet freezes a cluster of small crystals forms some distance above it. This phenomenon was at first thought to be a spontaneous condensation, but is more probably an example of a fragmentation process in which strains in the freezing droplet lead to the ejection of ice splinters.

Many other interesting experiments were made and some beautiful techniques were developed. The following list shows the variety of subjects studied:

construction of automatic condensation nucleus counter;

construction of counter giving a continuous record of the concentration of sea salt nuclei;

use of a vibrating capillary tube to produce a cloud of uniform droplets;

supercooling of samples of water (an interesting result which should be given more attention is that after ultrasonic irradiation of a sample of a few cm volume it was cooled to $-38.5°C$ before freezing);

testing of various substances as freezing nuclei, both in bulk water and supercooled clouds;

the role of ice nuclei in the formation of frazil ice in running water;

the preparation of replicas of snow crystals (using an elegant technique of making thin plastic moulds which preserve the minute surface detail of the original crystals; this simple method has greatly facilitated the recording and study of snow crystals);

the modification of crystal habit by impurities and by electric fields;

the form of cirrus crystals;

the fragmentation of dendritic crystals;

the rate of growth of crystals in various environments;

the stability of large water drops falling in air, and the processes of their disruption and collision.

It is hardly surprising that many of these subjects were studied superficially, and that more problems were discovered than solved; but this was the merit of these enthusiastic experimenters: they opened up whole new fields for investigation. It is perhaps unfortunate that they seemed to pay little attention to the results of other workers, particularly FINDEISEN, and therefore that certain misconceptions, for example in LANGMUIR's work on the growth of populations of cloud droplets and in the interpretation of the meteorological significance of phase transitions at $-40°$C, were allowed to persist. These were excusable faults, considering the spate of original ideas and discoveries made in their laboratory.

Project Cirrus Field Work.

If the laboratory work was novel, some of the field work was revolutionary.

A series of remarkable flight experiments were made in which shallow supercooled layer clouds were seeded with crystals, using both dry ice and silver iodide smoke as nucleating agents. Along the seeded path, described in various patterns, the cloud was transformed into a pure ice crystal cloud, of strikingly different appearance. The seeded lane usually expanded by diffusion until it was several km wide, and often the crystals were precipitated to a lower level, where they evaporated, so that great holes were left in the cloud layer. These experiments, often watched also from the ground, were spectacular demonstrations of the real potency of the newly discovered nucleating agents.

In another series of experiments conducted during three summers in New Mexico, growing cumulus were seeded, usually with dry ice. The experiments were made under ground radar surveillance. The expected transformation of seeded supercooled summits into crystal clouds was usually observed; sometimes the clouds subsequently dissipated without precipitating, while on other occasions they afterwards grew into massive cumulonimbus producing intense rains. The unavoidable difficulty of attributing such developments to the seedings seems at first to have been insufficiently appreciated. In the experiments on layer clouds the artificiality of the results is obvious, but in the experiments with cumulus the abnormal nature of the cloud behaviour after seeding is more difficult to demonstrate, particularly when other clouds not far away are becoming cumulonimbus. Descriptions which LANGMUIR gives of the natural development of cumulonimbus are in some respects more acute than any previously published, but qualitative comparison with the behaviour of seeded clouds is insufficient to make completely convincing his earlier unqualified assertions that some seedings were responsible for very heavy and rather widespread rains.

On another occasion, in October 1947, a seeding was carried out on a supercooled layer near the centre of a hurricane; an area of about 700 km² was converted into an ice cloud. Subsequently the storm centre changed course in a rather unusual manner, and there was some speculation about the seeding as a cause.

In 1949 studies of clouds were made at Puerto Rico. The aircraft used were equipped to seed clouds with a water spray, but it was found that all clouds of promising size precipitated naturally. These interesting observations do not seem to have been given the analysis they deserved.

Periodic Seeding.

In December 1949 LANGMUIR began an extraordinary experiment which is the subject of Part II of the Final Report. For several months a ground generator of silver iodide smoke was operated on two (at first three) particular days each week, with the aim of producing a periodic variation in the down-wind rainfall. The bulk of this volume of the Report consists of a detailed discussion of striking 7-day periodicities in rainfall and some other quantities which occured over a large area of the United States, and which, according to the analyses presented, were most pronounced during about the first five months over a region extending roughly from New Mexico to the Great Lakes. In this period the rainfall of the eastern part of this belt was about 50% above the normal.

The great length of this part of the Report obscures rather than illuminates these remarkable periodicities. Such periodicities are well known to occur from time to time, but the coincidence during this period with the seeding operation is surprising, to say the least. An important criticism of LANGMUIR's case is the lack of an acceptable physical hypothesis to link the periodicities with the seedings — when the experiment was begun, presumably only more local effects on convectional rains were expected. The experiment cannot be repeated because there are now many commercial seeding enterprises in the U.S.A.

The Report reveals LANGMUIR's disappointment at the ultra-cautious attitude of many influential meteorologists towards the prospects of weather modification.

The seeding controversy.

Official meteorologists in the U. S. A. and Great Britain, who in the years immediately after the war apparently took no initiative in developing the cloud physics which pointed to the possibility of weather modification, reacted to the incautious enthusiasm of the physicists prospecting this field by becoming excessively critical and sceptical. In the U.S.A. they may have been embarrassed by the appearance of commercial seeding agencies, often having no scientific direction.

An unfortunate situation arose in which neither LANGMUIR nor some of his critics kept strictly to a dispassionate, scientific attitude. Even in his Final Report, LANGMUIR says of the hurricane seeding:

"The chance that a given hurricane between latitudes of 20° and 40°N will change its direction in any given six-hour period is only about one in 110. Therefore, the fact that the 1947 hurricane *did* change its direction within six hours after seeding has a significance factor of the order of 100, so that there is considerable evidence that seeding hurricanes does tend to change their behaviour." This is not scientific reasoning.

Langmuir also quotes a report from the 1948 U.G.G.I. Assembly, according to which the Chief of the U.S. Weather Bureau announced that "in all the experiments made in the U.S., there was no recorded case in which seeding a cloud with dry ice had produced rain when rain from natural causes had not fallen within 30 miles. He confirmed that clouds had been dissipated locally by the use of dry ice, but it was doubted whether there were, in fact, any profitable possibilities of rainmaking on an extensive scale". The first remark has not necessarily an unfavourable implication, although this is likely to be assumed by a reader. At this time it could have been mentioned that an Australian experiment (Kraus, E. B. and Squires, P., Nature, London, **159**, 1947, p. 489) had beyond reasonable doubt caused a cumulus to become a large cumulonimbus and give substantial rainfall, when no other rain occurred within 150 miles. The remark that seedings had caused the dissipation of cloud may refer to experiments with layer clouds; if so these were results which could be used to support hopes of useful cloud modification; it may, however, have referred to Weather Bureau experiments on cumulus in which dissipation after seeding was emphasized as a common result, with quite inadequate evidence.

These quotations fairly illustrate the bias which occurred in statements on both sides. They stand in marked contrast against the sober reviews of those meteorologists who are leading cloud physicists such, for example, as the lecture at the 1948 U. G.G.I. Assembly by Bergeron on "The problem of artificial control of rainfall on the globe," in which he concluded that orographic clouds present the only possibility for "systematically causing abundant artificial rain". In more recent years the U.S. Weather Bureau has commenced laudable scientific studies of the possibilities of weather modification. In Great Britain, however, in 1954 the Under-Secretary of State for Air reported as stating that "there is no scientific basis for believing that any method (of rainfall stimulation) would be successful in achieving such a result (an economically useful precipitation)". In any country where this is the official view it will be very difficult to stimulate research into the prospects of weather control, for the experimental work in the atmosphere demands facilities (specially instrumented aircraft working in conjunction with radar and other ground units) which are beyond the means of other than government institutions. Moreover, as in Project Cirrus, it may be considered expedient that seeding experiments should be under the complete and exclusive control of personnel provided by the government, as a safeguard against liability for damage, though Schaefer says this "made the conduct of the flight program an extremely difficult and often frustrating operation from the scientific viewpoint."

It is in the light of the present situation that we must judge the value of Project Cirrus. It tried to persuade responsible meteorological opinion that cloud seeding "will eventually have a profound influence on world economics," and it failed. In this aim, however, it could hardly be expected to succeed in so short a time. We must think rather of the stream of stimulating ideas and experimental researches which poured from this Project and started controversy all over the world. These will not be wasted. In many places there must be thinking men who regard weather control as a reasonable, if distant goal, to be approached by improving our knowledge and understanding of fundamental meteorological processes.

F. H. Ludlam, London-Ås.

The Atmospheric Lunar Tides. Von R. Sawada. (New York University. College of Engineering. Meteorological Papers: Vol. 2, No. 3.) Mit 5 Textabb., 31 S. New York: University Press. 1954. $ 1.50.

Die durch die Gezeitenkräfte des Mondes und der Sonne verursachten Oszillationen der Atmosphäre waren bereits wiederholt Gegenstand theoretischer Abhandlungen. Bekanntlich ist es auch schon mehrfach gelungen, durch statistische Auswertung hinreichend großen Beobachtungsmaterials die aus der Theorie folgenden äußerst geringen Druckschwankungen (Größenordnung 10^{-2} mb) innerhalb der Fehlergrenzen nachzuweisen. Daß man neuerdings diesen Oszillationen trotz ihrer Geringfügigkeit und daher Bedeutungslosigkeit für die wetterwirksamen atmosphärischen Prozesse wieder stärkere Beachtung schenkt, hat einen besonderen Grund. Wie nämlich die Theorie lehrt — der Nachweis wird in der vorliegenden Untersuchung gebracht — übt die vertikale Temperaturverteilung der hohen Atmosphäre (Ozonosphäre und Ionosphäre) einen nicht vernachlässigbaren Einfluß auf die Form der Druckwellen (Amplitude und Phasenwinkel) aus. Nach einer Rekapitulation der Gezeitentheorie von Laplace und verschiedener Lösungsmethoden für die dabei auftretenden Gleichungen wird in der vorliegenden Abhandlung eingehend das Problem der Abhängigkeit der Gezeitenoszillationen der Atmosphäre von der Temperaturschichtung diskutiert. Dabei konnte der Verfasser für die Verhältnisse der hohen Atmosphäre auf Temperaturbeobachtungen mittels moderner Raketen zurückgreifen. Als besonders hervorzuhebendes Resultat ist das Ergebnis des Autors anzusehen, daß die von Chapman empirisch gefundenen jahreszeitlichen Variationen der atmosphärischen Mondgezeiten durch entsprechende Temperaturschwankungen der hohen Atmosphäre erklärt werden können.

H. Reuter, Wien.

Radiosonden. Von P. Beelitz. Mit 46 Textabb., 136 S. Berlin: VEB Verlag Technik. 1954.

Die letzte Gesamtdarstellung aller Radiosondentypen ist von L. Weickmann im Jahre 1938 herausgegeben worden. Damals stellte die Radiosonde nur *eine* aerologische Beobachtungsmethode neben Flugzeugaufstiegen und anderen Verfahren dar und das Netz der aerologischen Stationen war noch verhältnismäßig weitmaschig. Inzwischen hat sich die Radiosondentechnik praktisch zur einzigen aerologischen Methode entwickelt, die Instrumente wurden verbessert und die Aufstiegstechnik ermöglicht nun die Erreichung größerer Höhen. Ganz neue Typen von Gebern und Empfängern wurden ersonnen und in Betrieb genommen, das Beobachtungsnetz wurde über die ganze Erde erstreckt und wesentlich verdichtet und die Prüfung der Genauigkeit der verschiedenen Typen ist auf internationaler Grundlage organisiert und durchgeführt worden. All dies bedeutet so große Fortschritte auf dem Gebiete der Radiosondenaerologie, daß eine neue Gesamtdarstellung, wie sie im vorliegenden Buche geboten wird, einem wirklichen Bedürfnis entspricht und sehr begrüßt werden muß. Um den Umfang der Veröffentlichung nicht zu sehr zu erweitern, konnten nicht alle verwendeten Typen (derzeit ca. 20) in allen Einzelheiten in gleicher Weise ausführlich behandelt werden, sondern es konnte nur auf die Haupttypen, die in praktischer Verwendung stehen, näher eingegangen werden, woraus sich auch die wesentlichen Konstruktionsmerkmale der anderen Typen ergeben.

Nach einer kurzen Übersicht über die Entwicklung der aerologischen Beobachtungsmethoden werden die bei den Radiosonden verwendeten Arten der

Bestimmung von Temperatur (Flüssigkeitsthermometer, Metallthermometer, Widerstandsthermometer, Temperaturmessung in schnell strömenden Gasen), Feuchtigkeit (Aspirationspsychrometer, Haarhygrometer, Taupunktsmethode, elektrische Widerstandsmessung) und Luftdruck (Flüssigkeitsbarometer, elastisches Metallbarometer, Messung durch Siedepunktsbestimmung, gaskinetisches, elektrisches und Havens-Vakuummeter) in ihrer Wirkungsweise und in Bezug auf die Empfindlichkeit und auf die Fehlermöglichkeiten eingehend diskutiert. Ausführlich werden auch die Methoden und Auswertverfahren der optischen und elektrischen Höhenwindmessungen dargestellt. Dabei gibt eine Statistik der durchgeführten optischen Höhenwindmessungen im Vergleich zu dem Aufstiegssoll und der dabei erreichten Höhen einen interessanten Einblick in die Leistungsfähigkeit dieses Verfahrens. Im Durchschnitt waren in der Deutschen Demokratischen Republik von den vorgeschriebenen Höhenwindmessungen mit der optischen Methode nur 63% pro Jahr durchführbar und davon erreichten oder überschritten 75% Höhen von 1 – 2 km, 38% Höhen von 3 – 4 km, 22% Höhen von 5 – 6 km und 11% Höhen von 9 – 10 km. Von den elektrischen Höhenwindmeßmethoden werden die selbstsendenden aktiven Windsonden, und zwar Peilsonden ohne direkte Entfernungsbestimmung, Phasensonden mit direkter Entfernungsbestimmung und Laufzeitsonden mit direkter Entfernungsbestimmung und die nach dem Radarverfahren arbeitenden passiven Windsonden behandelt.

In der Beschreibung der Temperatursonden werden folgende Typen unterschieden: mechanische Radiosonden mit Steuerung der Zeichenangabe (Moltchanoff, Graw-Sprenger), mechanische Radiosonden mit Steuerung der Zeitangabe (Bureau, Lang), Radiosonden mit elektrischer Übertragung (Väisälä, Diamond), Raketenradiosonden mit Messungen beim Abstieg (Abwurfsonden) und Raketenradiosonden mit Messungen beim Aufstieg (V2-Raketen). In dem Buch werden ferner die für die Radiosondenaufstiege verwendeten Stromquellen, die Materialien der Ballonhüllen und ihre Eigenschaften, die in Betracht kommenden Aufstiegsgase und der Umgang mit Wasserstoff, die Eichung und die Durchführung des Starts der Radiosonden sowie die Auswertung der Messungen (an dem Beispiel der in der Deutschen Demokratischen Republik verwendeten Lang-Sonde gezeigt) und die Darstellung der Ergebnisse im thermodynamischen Papier nach Stüve erörtert.

F. Steinhauser, Wien.

Aerologisch-synoptische Kritik an den Radiosondenaufstiegen im Gebiete der Deutschen Demokratischen Republik. Von P. Beelitz. (Abhandlungen des Meteorologischen und Hydrologischen Dienstes der DDR: Nr. 17.) Mit 6 Textabb., 39 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1953. DM 12.50.

Einleitend wird über Bearbeitungen von Vergleichsaufstiegen mit verschiedenen Sondentypen referiert. Die eigenen Vergleiche zur Beurteilung der Sondenmeßwerte stützt der Verfasser auf die relativen Topographien 500/1000 mb der Wetterwarten Bad Kissingen, Hamburg und Potsdam. Er weist darauf hin, daß dieser Methode viel Subjektives anhaftet, da die Linienführung der Isopotentialen je nach der Auffassung der einzelnen Synoptiker von der Wetterlage durchaus nicht immer gleichartig ist. Diesem Umstande wurde auch bei der Tagung in Payerne (1950) entsprechende Bedeutung beigemessen.

Die Vergleiche der Meßwerte der Radiosonde 4RS des Wetterdienstes der DDR, die eine verbesserte Form der „Lang-Sonde" darstellt, mit den mittleren Abweichungen von den drei Topographien ergaben, daß 34% der Meßwerte nahezu keine Abweichung zeigten, daß 45% zu hoch und 21% zu tief waren. Die Sondierungen in der DDR lieferten für die relative Topographie 500/1000 mb im Jahresmittel um 5,5 gpm zu hohe Werte; dies bedeutet, daß das Jahresmittel der Temperatur um 0,3° C zu hoch beurteilt wird.

Im zweiten Teil der Arbeit beschäftigt sich Beelitz mit der Möglichkeit, Fehlmessungen einzuschränken. Es wird eine gründliche physikalische Analyse der Wirkungsweise von Wärmeleitung, Wärmeübergang, Wärmedurchgang, Wärmebestrahlung und Wärmekonvektion bei Temperaturmessungen mit Bimetallen geboten und nach einer Beschreibung des Wärmeelementes der 4 RS werden die theoretischen Grundlagen dieser Temperaturmeßgeräte diskutiert.

Die Einstellzeiten des Wärmeelementes, welches im Falle der 4RS das Bimetall CKC ist, betragen 11 bis 61 Sekunden. Zum Vergleich darf angeführt werden, daß das letzte Modell der US-Sonde (Bendix-Friez) Einstellzeiten von etwa 8 Sekunden hat. Ferner werden die Störungen des Wärmeüberganges durch ungenügende Ventilation erörtert und Grenzen für die ausreichende Ventilation in verschiedenen Höhen abgeleitet. Dem abschließenden Urteil, daß die Grenzen der Verwendungsmöglichkeiten des Bimetalls als aerologisches Temperatur-Element bald erreicht sind, kann nur beigepflichtet werden. Die Untersuchung der durch Strahlung bedingten Wärmeeffekte ergab für die Aufstiege in der DDR ein Gesamtmittel der positiven Abweichungen der Temperaturdifferenzen zwischen Tag- und Nachtaufstiegen im 100-mb-Niveau im Betrage von +3,4° C.

Schließlich werden auch die aus fehlerhaften Luftdruckmessungen resultierenden Temperaturfehler erörtert. Dafür sind elastische Trägheitserscheinungen an Vidiedosen und eine unzureichende Temperaturkompensation der Vidiedosen von Bedeutung. Nach einer übersichtlichen Darstellung der Methoden, nach denen diese Einflüsse auf die Druckdose zu eliminieren sind, schließt die Arbeit mit einer Zusammenfassung der möglichen Fehler am Bimetall und an der Druckdose.

Die Arbeit ist ein wertvoller Beitrag, besonders für alle, die im praktischen Betrieb bei der Radiosonde stehen; denn es werden damit auch in kurzgefaßter Form die Grundlagen geboten, die zur kritischen Beurteilung der täglichen Arbeit mit der Radiosonde und ihrer Ergebnisse erforderlich sind.

J. Lukesch, Wien.

Theoretische Hydromechanik. Von N. J. Kotschin, I. A. Kibel, N. W. Rose. Band I. Mit 179 Textabb., XI, 508 S. Berlin: Akademie-Verlag. 1954. DM 48.—.

Theoretische Hydromechanik ist ein Zweig der Physik, der besonders auch für die Meteorologie und Geophysik große Bedeutung hat. Es muß daher eine Neuerscheinung auf diesem Gebiete auch unser Interesse finden und dies um so mehr, als es sich im vorliegenden Werk um eine ausführliche auf zwei Bände projektierte Darstellung des Gesamtgebietes der Hydromechanik aus der Feder russischer Physiker handelt, die uns auch mit Ergebnissen russischer Forschungen in deutscher Sprache bekannt macht, die sonst wegen der sprachlichen Schwierigkeiten nur schwer zugänglich sind. Die deutsche Übersetzung stützt sich auf die 4. Auflage der russischen Ausgabe, die durch

Hinweise auf einen allgemeinen hydrodynamischen Wirbelsatz von Ertel und auf Arbeiten über stationäre und nichtstationäre oszillatorische Luftströmungen von Ertel und von Craig ergänzt worden ist. Im vorliegenden ersten Band werden in sehr klarer und exakter Form die Kinematik des flüssigen Mediums, die Grundgleichungen der Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit, die Hydrostatik, die einfachsten Bewegungen einer idealen Flüssigkeit, die Wirbelbewegungen einer idealen Flüssigkeit, das ebene und das räumliche Problem der Körperbewegung in einer idealen Flüssigkeit und die verschiedenen Wellenbewegungen einer idealen Flüssigkeit behandelt. In den einzelnen Abschnitten wird auch auf geophysikalische oder meteorologische Anwendungen eingegangen, wovon besonders aus dem letzten Abschnitt die Behandlung der Gezeiten, der Umströmung von Hindernissen und der Wellenbewegungen in der rotierenden Atmosphäre hervorgehoben sei. Instruktive Übungsaufgaben, die den einzelnen Abschnitten beigegeben sind, ermöglichen es, die Anwendung der theoretischen Entwicklungen an konkreten Beispielen zu erproben. Nach dem Studium dieses ersten Bandes wird man mit gesteigertem Interesse dem Erscheinen des zweiten Teils entgegensehen, mit dem diese schöne zusammenfassende Darstellung der modernen Strömungslehre abgeschlossen werden soll.

F. Steinhauser, Wien.

Aspirations-Psychrometer-Tafeln. Herausgegeben vom Deutschen Wetterdienst. Dritte, erweiterte Auflage. XX, 183 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1955. DM 35.—.

An sich benötigen die Aspirations-Psychrometer-Tafeln, die erstmals 1908 vom Preußischen Meteorologischen Institut herausgegeben, in der Zwischenzeit vom Reichsamt für Wetterdienst neu aufgelegt wurden und jetzt in dritter, erweiterter Auflage vom Deutschen Wetterdienst wieder herausgebracht werden, keine besondere Empfehlung mehr; sie sind weit herum eingeführt und bilden ein wertvolles Hilfsmittel für den beobachtenden Meteorologen. Es darf aber doch darauf hingewiesen werden, daß in dieser Neuauflage manchen Verbesserungswünschen Rechnung getragen wurde und daß vor allem die neueren Erkenntnisse Berücksichtigung gefunden haben. So wurden die neuesten Ausgangswerte für den Sättigungsdampfdruck des Wasserdampfes aus den Smithsonian Meteorological Tables den Berechnungen zu Grunde gelegt und nicht nur in mm, sondern auch in mb angegeben. Wenn man bedenkt, wie früher bei tiefen Temperaturen, ganz besonders bei trockenen Wettersituationen in großer Meereshöhe, auf Grund der klassischen Sprungschen Psychrometerformel vielfach bedeutend zu niedrige Dampfdrucke und relative Feuchtigkeiten berechnet wurden, erkennt man erst recht den großen Vorzug der neuen Psychrometer-Tafeln, in denen nun für den Fall von Eis am befeuchteten Thermometer die von Robitzsch und Flohn nachgewiesene richtige Psychrometerkonstante von 0.43 (statt 0.50) eingeführt und dadurch das Sprungsche Abzugsglied auf den korrekten Wert verkleinert wurde.

Den Hauptteil des Tafelwerks bilden die ausführlichen Tabellen zur direkten Entnahme von Dampfdruck und relativer Feuchte mit den notwendigen Hilfstabellen für die Luftdruckkorrektion, für das Sprungsche Abzugsglied, für die Bestimmung von Mischungsverhältnis und spezifischer Feuchte, von Sättigungsdefizit und Taupunkt. Eine eingehende deutsche Erläuterung und Gebrauchsanweisung zu den Tafeln und kürzer gefaßte

Instruktionen in englischer, französischer und spanischer Sprache tragen zur Verbreitung und zur Erleichterung einer systematischen Ausnützung der Tafeln bei. Zu bedauern ist lediglich, daß, um die Druckkosten nicht zu hoch ansteigen zu lassen, ein Reproduktionsverfahren gewählt werden mußte, das auf das Auge des Benützers ermüdend wirkt und den in den früheren Auflagen benützten Vorzug einer Gliederung der Tabellen durch differenzierenden Drucksatz nicht mehr anzuwenden gestattet.

W. Mörikofer, Davos.

Astronautica Acta. Vol. I/Fasc. 1. Schriftleitung F. Hecht. Wien: Springer-Verlag. 1955.

Die Probleme der Weltraumfahrt gewinnen immer mehr Interesse, und es ist bekannt, daß ernsthafte Bestrebungen bestehen, die Weltraumfahrt selbst aus dem Stadium akademischer Debatten der technischen Verwirklichung zuzuführen. In jüngster Zeit hat sich auch eine Internationale Astronautische Föderation gebildet, deren Aufgabe es ist, in systematischer Forschungsarbeit die realen Grundlagen des Weltraumfluges zu schaffen. Als offizielles Organ dieser Föderation ist die vorliegende Zeitschrift gegründet worden, die vierteljährlich erscheinen soll. Zu den darin zu behandelnden Problemen gehören auch solche über Erscheinungen und Aufbau der obersten Atmosphärenschichten, über kosmische Strahlung, über Raketentechnik, über Raumfahrtmedizin u. dgl. und damit gewinnt diese Zeitschrift auch für Geophysiker und Meteorologen Interesse, weshalb auch hier auf diese Neuerscheinung aufmerksam gemacht werden soll.

F. Steinhauser, Wien.

Geophysik — Dokumentation. Redaktion O. Meisser. (Sonderdrucke aus „Bergakademie", Zeitschrift für Bergbau, Hüttenwesen und verwandte Wissenschaft.) Freiberg in Sachsen. 1954.

Seit einiger Zeit erscheinen in der Zeitschrift „Bergakademie" Referatesammlungen über Arbeiten aus allen Gebieten der Geophysik mit besonderer Bevorzugung der angewandten Geophysik. Diese Referate sind so ausführlich gehalten, daß daraus der wesentliche Inhalt und die Ergebnisse der betreffenden Arbeiten entnommen werden können. Im Jahrgang 1954 wurden Arbeiten von 315 Autoren referiert. Der Referatenteil der Zeitschrift „Bergakademie" wird auch als Sonderdruck vom Institut für angewandte Geophysik der Bergakademie Freiberg i. Sachsen herausgegeben und es sei deshalb auch hier auf diese wertvolle Veröffentlichung hingewiesen.

F. Steinhauser, Wien.

Selected Meteorological Papers. Von Sir Napier Shaw. Mit zahlreichen Textabb., 275 S. London: Macdonalds Co. Ltd. 1955. Geb. 50 s.

Mit der Veröffentlichung der ausgewählten meteorologischen Arbeiten von Sir Napier Shaw wird ein Wunsch des Autors erfüllt. Da Shaw einer der Pioniere der meteorologischen Wissenschaft war, kommt seinen Arbeiten nicht nur eine historische Bedeutung zu, sondern sie haben auch bleibenden Wert. Darum muß es sehr begrüßt werden, daß die wichtigsten seiner Arbeiten, die zum Teil heute nur schwer zugänglich sind, gesammelt vorgelegt werden konnten. Diese Veröffentlichung gibt dabei auch der jüngeren Genera-

tion Gelegenheit, die Entstehung und Entwicklung mancher heute zum allgemein bekannten Gedankengut der meteorologischen Wissenschaft gehörenden Gedankengänge und Gesetze in der Originalveröffentlichung kennenzulernen und läßt die älteren Meteorologen erkennen, wie sich gewisse grundlegende Erkenntnisse aus früherer Zeit weiterentwickelt und welche Bedeutung sie erlangt haben.

Als ersten Beitrag enthält der Band SHAWS umfangreiche und grundlegende Untersuchungen über die Lebensgeschichte der Luftströmungen und Trajektorien der Luftbewegung (1906). Weitere Beiträge behandeln die Vektordiagrammdarstellung des Windes zur Charakterisierung der Veränderungen der Luftströmungen (1910), die mit Principia Atmospherica betitelte Studie der atmosphärischen Zirkulation (1913), eine Arbeit über die Bahnen von Depressionen und Tornados und die Beziehungen zwischen Druck und Wind bei kreisförmigen Isobaren (1918), einen Vortrag über Geburt und Tod von Zyklonen (1920), eine Abhandlung über die konvektive Energie gesättigter Luft in natürlicher Umgebung (mit der Entwicklung des Tephigramms, 1924) und eine Note über die graphische Darstellung von Druck und Temperatur nach aerologischen Beobachtungen (1925). Im Zusammenhang mit gegenwärtigen Diskussionen über das Thema im Rahmen der meteororologischen Weltorganisation gewinnen auch SHAWS Ausführungen über die Maßeinheiten für die meteorologischen Messungen neues Interesse. Auch einige Arbeiten SHAWS aus dem Gebiet der Anwendung der Meteorologie in der Agrarmeteorologie sind wiedergegeben, und zwar eine Untersuchung über die Abhängigkeit des Weizenertrages von meteorologischen Faktoren (1906) und über die Anordnung von Wetterbeobachtungen zum Vergleich mit der Entwicklung der Vegetation und der Kulturfrüchte (Growers Jahr, 1933). Ein abschließender Beitrag "The March of Meteorology" bringt neben persönlichen Erinnerungen auch eine anregend geschriebene Darstellung über die Entwicklung des Meteorological Office während der Dienstzeit SHAWS. Es ist überflüssig, darauf hinzuweisen, daß es, abgesehen von dem wissenschaftlichen Inhalt der Beiträge, auch einen Genuß bedeutet, die in glänzendem und originellem Stil geschriebenen Arbeiten SHAWS zu lesen. Den Abschluß bildet eine Bibliographie von 381 wissenschaftlichen Veröffentlichungen.

F. STEINHAUSER, Wien.

Herausgeber, Eigentümer und Verleger: Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5.
Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. F. Steinhauser, Wien XIX, Hohe Warte 38.
Druck: Carl Ueberreuter, Wien IX.

Fortsetzung von der II. Umschlagseite

weiligen Stand eines bestimmten Problems gegeben werden, wobei besonders durch Hervorheben der noch ungelösten Fragen der weiteren Forschung Anreiz geboten werden soll. Schließlich werden auch kritische Buchbesprechungen auf bedeutende Neuerscheinungen aus unserem Wissensgebiet hinweisen.

Die Verfasser werden gebeten, den Text möglichst knapp zu fassen und historische Einleitungen tunlichst zu vermeiden. In den beigegebenen Tabellen ist die Wiedergabe unverarbeiteten, umfangreichen Beobachtungsmaterials zu vermeiden; auch sollen die Resultate im allgemeinen nicht durch Tabellen und Kurven gleichzeitig wiedergegeben werden. Die Tabellen sollen eine Überschrift tragen.

Die Arbeiten können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung in mindestens zwei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser mitzuliefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt. Die Literaturhinweise erfolgen durch im laufenden Text in Klammern eingefügte Nummern, die genaue Zitate bezeichnen, die in einem Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit zusammenzustellen sind.

Die Manuskripte sind möglichst in Maschinenschrift auf einseitig beschriebenen, fortlaufend paginierten Blättern abzufassen. Abbildungsvorlagen sind in so sauberer Wiedergabe einzusenden, daß sie entweder unverändert verwendet oder durch Zeichner des Verlages einwandfrei neu gezeichnet werden können. Die Beschriftung, die innerhalb der Zeichnung angebracht wird, ist nur mit weichem Bleistift einzutragen.

Grundsätzlich werden nur Arbeiten aufgenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind; der Autor verpflichtet sich, diese auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen. Mit der Annahme und Veröffentlichung des Manuskriptes geht das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder auf den Verlag über. Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme u. ä. von Heften der Zeitschrift, einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen. Die Autoren erhalten 75 Separata ihrer Arbeit kostenlos und können maximal weitere 125 Separata zum angemessenen Preis beziehen. Die Bestellung muß mit dem dem Fahnenabzug beigelegten Bestellzettel bei der Rücksendung der korrigierten Fahnen erfolgen.

Die Autoren erhalten eine erste Fahnenkorrektur, die sie nach erfolgter Durchsicht an den Verlag zu senden haben; eine Umbruchkorrektur wird den Autoren nicht zugestellt. Autorkorrekturen, d. h. nachträgliche Textänderungen, werden, soweit sie 10% der Satzkosten überschreiten, den Verfassern in Rechnung gestellt.

Manuskripte und Anfragen sind an einen der beiden unterzeichneten Herausgeber

Dozent Dr. W. Mörikofer
Physikalisch-Meteorologisches Observatorium
Davos-Platz, Schweiz

Prof. Dr. F. Steinhauser
Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik
Wien XIX, Hohe Warte 38, Österreich

zu richten; alle geschäftlichen Mitteilungen an:

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5
Telephon U 26 5 60 Serie. Telegrammadresse: Springerbuch Wien

Der Verlag

SPRINGER-VERLAG IN WIEN I

Soeben erschien:

Atlas zur Spurenkunde der Elektrizität

Von

Stefan Jellinek

Professor an der Universität und an der Technischen Hochschule Wien. Lauréat de l'Institut de France, Membre correspondent de l'Institut National Genevois, Late Reseerch Student at Queen's College Oxford.

94 Tafeln mit 199 teils mehrfarbigen Abbildungen. VIII, 78 Seiten. Gr.-8°. 1955. Ganzleinen S 435.—, DM 72.50, $ 17.25, sfr. 74.20

Von der ersten bis zur letzten Seite ist dies ein originelles Werk! Der Verfasser legt damit der Fachwelt die Ergebnisse seiner eigenen jahrzehntelangen Forschungen auf einem Gebiet vor, das die mannigfachsten Aspekte aufweist und für naturwissenschaftliche Grundfragen ebenso bedeutsam ist wie für die praktische Anwendung in Medizin und Technik. Aus der Vielfalt der von ihm gefundenen Blitz- und Stromdurchgangsspuren in belebter und unbelebter Materie ergeben sich Folgerungen und neuartige Probleme, die für den Physiker, Chemiker, Biologen und Mediziner von Interesse sind und neue Perspektiven eröffnen.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Soeben erschien:

Bericht über den V. Internationalen Astronautischen Kongreß, Innsbruck, 5. bis 7. August 1954. Im Auftrage der Österreichischen Gesellschaft für Weltraumforschung herausgegeben von **Friedrich Hecht,** Wien. Mit 165 Abbildungen. VI, 307 Seiten. Gr.-8°. 1955.

Steif geheftet S 348.—, DM 58.—, $ 13.80, sfr. 59.30

Vorzugspreis für Abonnenten der Zeitschrift „Astronautica Acta" und für Mitglieder der International Astronautical Federation:

Steif geheftet S 278.40, DM 46.50, $ 11.05, sfr. 47.50

Inhaltsverzeichnis

Oberth, H., Feucht bei Nürnberg. Grundsätzliches zur Raumtaucherrüstung. — **Zaehringer, A. J.,** Allen Park/Mich. Solid Propellants and Astronautics. — **Ehricke, K. A.,** Buffalo/N. Y. Analysis of Orbital Systems. — **Kölle, H. H.,** Stuttgart. Der Einfluß der Auslegung der Turbopumpe auf die Flugleistungen einer Großrakete. — **Langton, N. H.,** London. The Thermal Dissipation of Meteorites by Bumper Screens. — **Romick, D. C.,** North Canton/O. Basic Design Principles Applicable to Reaction-Propelled Space Vehicles. — **Stuhlinger, E.,** Huntsville/Ala. Possibilities of Electrical Space Ship Propulsion. — **Kaeppeler, H. J.,** und **M. E. Kübler,** Stuttgart. Die Rückkehr von geflügelten Geräten von Außenstationsbahnen. — **Preston-Thomas, H.,** Ottawa. Two Aspects of the Time Element in Interplanetary Flight. — **Vertregt, M.,** Den Haag. Calculation of Step-Rockets. — **Pirquet, G. v.,** Wien. Zur Nomenklatur der Gewichtswerte von Stufenraketen. — **Kooy, J. M. J.,** Breda. On Automatic Internal and External Control of Long Range Rockets. — **Engel, R.,** Héliopolis. Entwurfsverfahren für Höhenraketen mit Preßgasförderung. — **Bödewadt, U. T.,** Héliopolis. Über den Einfluß der Rekombination auf die Leistung von Flüssigkeitsraketen. — **Eugster, J.,** Bern. Demonstration über den Nachweis der kosmischen Strahlung im menschlichen Körper. — **Fitzer, E.,** Wien. Die Entwicklung hochtemperaturbeständiger Werkstoffe für die Luft- und Weltraumfahrt. — **Kieffer, R.,** und **F. Benesovsky,** Reutte/Tirol. Gesinterte Hochtemperaturwerkstoffe. — **Vassy, E.,** Paris. L'exploration de la haute atmosphère avec les engins autopropulsés et le programme français de l'Année Géophysique Internationale 1957—1958. — **Ordway, F. I., III,** New York, und **H. E. Canney, Jr.** Buffalo/N. Y. The Respectability of Astronautics as Reflected by Recent Developments in the United States. — **Partel, G. A.,** Monfalcone. IAF: Utopia or Reality? — **Levitt, I. M.,** Philadelphia/Pa. Geodetic Significance of a Minimum Satellite Vehicle. — **Dyrgalla, R. V.,** Buenos Aires. Die „Neo-Ideographie" als Mittel zur Verständigung für künftige Beziehungen mit anderen Planeten. — **Cap, F.,** Innsbruck. Über Strömungsvorgänge, die mit einer Verbrennung gekoppelt sind. — **Ruppe, H.,** Berlin-Charlottenburg. Über die aerodynamische Erwärmung von kegelförmigen Flugkörpern im Bereich extrem hoher Machzahlen. — **Cocca, A. A.,** Buenos Aires. Die rechtliche Natur des Weltraums. — **Cremona, C. E.,** Roma. Rilevamento e rivelamento delle caratteristiche di volo dei razzi e missili.

Astronautica Acta. Offizielles Organ der Internationalen Astronautischen Föderation. Herausgegeben von **W. v. Braun,** Huntsville/Ala., **A. Eula,** Roma, **J. M. J. Kooy,** Breda, **E. Sänger,** Stuttgart, **K. Schütte,** München, **L. R. Shepherd,** Chilton, **J. Stemmer,** Baden/Schweiz. Schriftleitung: F. Hecht, Wien.

Die Zeitschrift erscheint vierteljährlich.

Jahresbezugspreis S 216.—, DM 36.—, $ 8.60, sfr. 37.20

Mitglieder der International Astronautical Federation (IAF) bzw. deren Mitgliedsgesellschaften können die Zeitschrift als das Organ der IAF zu einem um 20% ermäßigten Preis beziehen.

Inhalt des dritten Heftes (Erschienen im Juli 1955)

Kaeppeler, H. J., Über den Transport von Translationsenergie bei Kurzzeitvorgängen. — **Boni, A.,** Artificial Satellite, Unification and Mechanics (Sidar-Mechanics). — **Ehricke, K. A.,** On the Descent of Winged Orbital Vehicles. — Buchbesprechung.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria